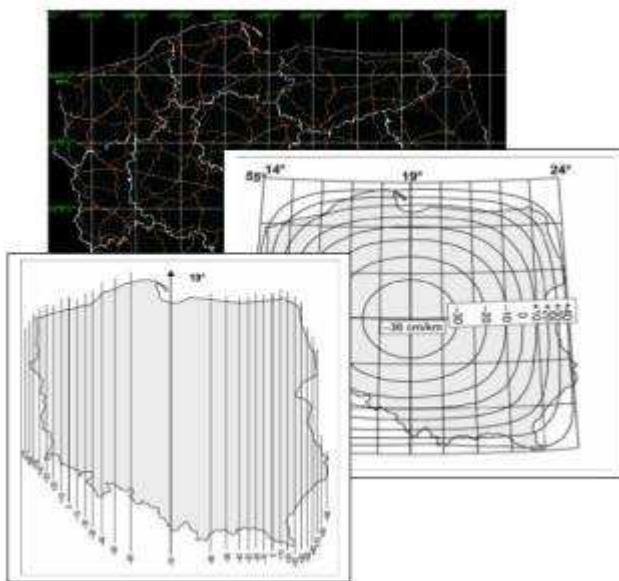


Roman J. Kadaj

POLSKIE UKŁADY WSPÓŁRZĘDNYCH

FORMUŁY TRANSFORMACYJNE, ALGORYTMY I PROGRAMY



Rzeszów 2002

Roman J. Kadaj
POLSKIE UKŁADY WSPÓLRZĘDNYCH
FORMUŁY TRANSFORMACYJNE, ALGORYTMY I PROGRAMY

Spis treści

1. Globalny system odniesień przestrzennych i jego polska realizacja	3
2. Krótki przegląd starych i nowych układów współrzędnych	4
3. Ogólne zasady transformacji pomiędzy układami odwzorowawczymi różnych elipsoid odniesienia	8
4. Transformacje pomiędzy układami tej samej elipsoidy	10
5. Krótka synteza	11
6. Przekształcenia konforemne płaszczyzn przy zastosowaniu wielomianu zespolonego	12
7. Wierność i pole zniekształceń odwzorowawczych	13
8. Odwzorowanie Gaussa- Krügera „od kuchni”	15
9. Aplikacje odwzorowania Gaussa-Krügera (tworzenie układów kartograficznych 1942, 1992, 2000, UTM oraz 1965 w strefie 5	18
10. Odwzorowanie quasi-stereograficzne i jego aplikacje	20
11. Algorytmy alternatywne dla „1965” lub GUGiK-80	23
12. Przeliczenie współrzędnych geodezyjnych B,L,H na współrzędne kartezjańskie centryczne X,Y,Z dowolnej elipsoidy i zadanie odwrotne	26
13. Przeliczenia pomiędzy elipsoidami	28
14. Określanie przybliżonych wysokości elipsoidalnych dla zadań transformacji dwuwymiarowej	31
15. Problematyka korekt post-transformacyjnych związanych z empirycznym układem odniesienia	32
16. Problematyka wyznaczenia formuł transformacyjnych pomiędzy układem lokalnym a państwowym	40
17. Programy obliczeniowe	47
Literatura	51

1. Globalny system odniesień przestrzennych i jego polska realizacja

W roku 2000, na mocy Rozporządzenia Rady Ministrów [12] wprowadzono w Polsce nowy, państwowy system odniesień przestrzennych zgodny z zachodnioeuropejskim systemem **ETRS** (*European Terrestrial Reference System*), będącym częścią światowego systemu **ITRS**. Samo pojęcie systemu zawiera w sobie całokształt struktury organizacyjnej, naukowej i aplikacyjnej (technicznej) służącej wyznaczeniu kształtu i pola grawitacyjnego Ziemi, definicji układów współrzędnych i ich realizacji fizycznych dla potrzeb geodezji, kartografii i nawigacji.

Istotnym elementem systemu **ITRS / ETRS** jest geometryczno - fizyczny model Ziemi. W sensie **fizycznym** model opisuje ziemskie pole grawitacyjne, w tym kształt geoidy globalnej oraz ruch obrotowy Ziemi jako planety, natomiast część **geometryczna** (matematyczna) definiuje parametry geocentrycznej elipsoidy obrotowej, generalizującej kształt geoidy. Pierwotny model zwany skrótowo **GRS-80** (*Geodetic Reference System '80*) uległ w latach późniejszych pewnej modyfikacji, przyjmując symboliczną nazwę **WGS-84** (*World Geodetic system '84*). Ponieważ parametry geometryczne elipsoid dwóch modeli różnią się o nieistotną praktycznie wartość ok. 0.1 mm więc w praktyce nazwy elipsoid (tak jak nazwy modeli) przyjmuje się niekiedy wymiennie. Elipsoidy są oczywiście podstawą definicji odpowiednich globalnych **układów współrzędnych** geodezyjnych. Fizyczną realizacją układu współrzędnych (jego powiązania z fizyczną Ziemią) jest **układ odniesienia**. Dokonuje się to poprzez punkty (stacje) geodezyjne, którym na drodze procesów pomiarowych nadaje się określone współrzędne elipsoidalne (geodezyjne). Inaczej mówiąc, samo pojęcie układu współrzędnych pozostaje kategorią czysto teoretyczną dopóty nie zostaje on zmaterializowany poprzez osnowy geodezyjne.

W Europie system **ETRS** został zrealizowany fizycznie poprzez układ 35 stacji obserwacyjnych, nazwany skrótowo układem **ETRF** (*European Terrestrial Reference Frame*). Jakkolwiek stacje bazowe układu **ETRF** są rozlokowane w stabilnych tektonicznie rejonach kontynentu, płyty tektoniczne ulegają jednak obserwowalnym ruchom względnym, więc związany z nimi układ **ETRF** ma charakter dynamiczny, podlegając periodycznym korektom. W celach praktycznych przyjmuje się, że wszelkie aktualne pomiary są redukowane na epokę 1989, stąd stan tego układu oznaczamy skrótem **ETRF'89**.

W Polsce, już w pierwszej połowie lat 90-tych dokonano rozszerzenia układu **ETRF** poprzez powiązanie krajowych osnow geodezyjnych z sieciami zachodnioeuropejskimi. Założono najpierw sieć bazową złożoną z 11 punktów (sieć **EUREF-POL**), którą zagęszczono następnie 348 punktami (sieć **POLREF**) rozmieszczonymi równomiernie w obszarze Kraju. Wszelkie obserwacje zostały wykonane techniką GPS. Ostateczne współrzędne geodezyjne punktów (B,L,H) wyznaczono w układzie **ETRF'89** na elipsoidzie **GRS-80**. W ten sposób sieć **EUREF-POL + POLREF**, jako tzw. sieć zerowego rzędu, stanowi obecnie dla obszaru Polski bazę odniesienia dla wszelkich prac geodezyjno – kartograficznych w układzie europejskim **ETRF'89**. Warto w tym miejscu dodać, że przeciętny błąd położenia punktu sieci **POLREF** względem **EUREF-POL** nie przekracza wartości 0.02m, co świadczy o jakości naszego „wejścia” do układu **ETRF**. W roku 1996 dokonano ponownego wyrównania dawnej sieci astronomiczno-geodezyjnej i triangulacji wypełniającej (sieci I klasy) w nawiązaniu do **EUREF-POL + POLREF** na elipsoidzie **GRS-80**. Sieć ta objęła łącznie ok. 6500 punktów. Pomimo, że wykorzystano jedynie klasyczne obserwacje kąto- – liniowe wyniki wyrównania okazały się pod względem jakościowym rewelacyjne. Przeciętny błąd położenia punktu wyniósł ok. 0.02 m, czyli porównywalne z poziomem dokładności aktualnej technologii względnych pomiarów GPS. W końcu lat 90-tych dokonano również powtórnych wyrównań sieci II klasy w nawiązaniu do wszystkich punktów klas wyższych w układzie **ETRF'89**. Obok zasadniczego zbioru obserwacji archiwalnych wykorzystano również nowe sieci zrealizowane techniką GPS.

Obecnie możemy stwierdzić, że istniejąca już w Polsce fizyczna realizacja układu **ETRF'89** wystarcza w pełni do tego, by w tym układzie (w ogólności w systemie **ETRS**) realizować już wszelkie opracowania geodezyjno – kartograficzne. Do tego celu zdefiniowano (por. [12, 13, 14]) nowe państwowe układy współrzędnych (układy kartograficzne) zwane skrótowo: **1992** (dla map topograficznych) **2000** (dla map wielkoskalowych) – będą one m.in. omawiane szczegółowo w ramach niniejszego wykładu. Zgodnie z cytowanym już Rozporządzeniem Rady Ministrów [12], w zakresie mapy gospodarczej Kraju, całkowite przejście z układu dotychczasowego **1965** związanego z **elipsoidą KRASOWSKIEGO**, na nowe układy odwzorowawcza ma nastąpić do roku 2009.

Podstawą do tworzenia nowych map numerycznych będą nie tylko wyniki nowych pomiarów. Można przypuszczać, że ze względów ekonomicznych nastąpi masowe wykorzystywanie archiwalnych materiałów geodezyjno-kartograficznych. Pojawia się więc problemy przeliczeń transformacji współrzędnych pomiędzy różnymi układami. W grupie układów źródłowych, obok **1965**, problematyka transformacyjna będzie obejmować także układy lokalne zakładane ongiś dla większych miast, a także dawny układ **1942** i inne. Problematyka ta wypełni nasz wykład.

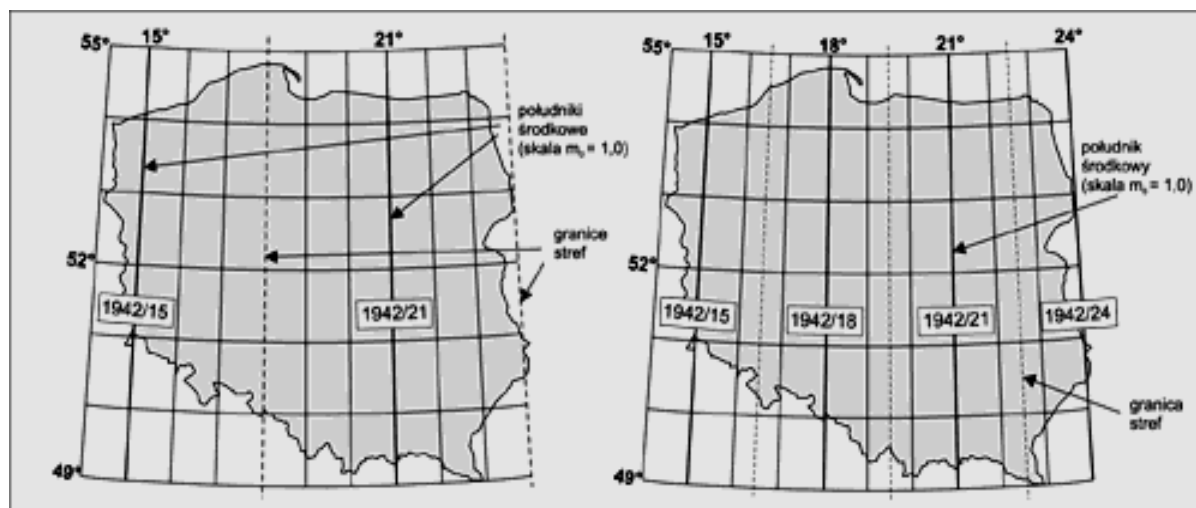
2. Krótki przegląd starych i nowych układów współrzędnych

Różne, państwowe układy współrzędnych można sklasyfikować przede wszystkim pod względem ich teoretycznej genezy, tj. przyjętej matematycznej powierzchni odniesienia (elipsoidy) generalizującej lokalnie lub globalnie kształt geoidy oraz rodzaju i zasięgu obszarowego zastosowanego odwzorowania. Ta ostatnia kwestia była w ostatnich latach przedmiotem wielu dyskusji, a dotyczyła wyboru konkretnych odwzorowań dla map wielkoskalowych i topograficznych, po przyjęciu nowego systemu odniesień przestrzennych z elipsoidą **GRS-80 (WGS-84)**. Jednym z kryteriów wyboru była wielkość maksymalnych zniekształceń liniowych, istotna zwłaszcza w zakresie map wielkoskalowych (mapy zasadniczej). Kompromis w tym względzie z jednej strony, a tradycja w wyborze rodzaju odwzorowania – z drugiej strony, doprowadziły formalnie do zdefiniowania dwóch układów (systemów) kartograficznych opartych na odwzorowaniu *Gaussa–Kriigera*:

- 1992** jednostrefowy dla obszaru całej Polski, przeznaczony m.in. do opracowań kartograficznych w skalach 1: 10000 i mniejszych
- 2000** 4–strefowy dla mapy zasadniczej. Podział obszaru Polski na 4 strefy stanowił w istocie powrót do koncepcji dawnego układu **1942**.

W Polsce, podobnie jak w innych państwach byłego układu warszawskiego, obowiązywała od roku 1952 **elipsoida KRASOWSKIEGO** z punktem przyłożenia do geoidy w Pułkowie pod Moskwą i lokalną orientacją azymutalną (był to system przyjęty w b. ZSRR w roku 1942 – stąd też zwany **PUŁKOWO '42**). Należy podkreślić, że sama elipsoida stanowi tylko element geometryczny systemu odniesień przestrzennych definiowanego przez szerszy zbiór parametrów lokacyjnych i fizycznych związanych z Ziemią. **Elipsoida KRASOWSKIEGO** zastąpiła w Polsce dawną **elipsoidę BESSELA** z punktem przyłożenia do geoidy w Borowej Górze. W wyniku wzajemnego powiązania państwowych **sieci astronomiczno – geodezyjnych, elipsoida KRASOWSKIEGO** (w systemie **PUŁKOWO '42**) z jej układem współrzędnych geograficznych–geodezyjnych stała się bazą odniesienia dla polskich osnów geodezyjnych i układów odwzorowawczych.

Do połowy lat 60-tych obowiązywał w Polsce układ współrzędnych zwany krótko „**1942**”. Układ ten powstał w oparciu o odwzorowanie *Gaussa–Kriigera* elipsoidy **KRASOWSKIEGO**, przy czym obejmował dwa podsystemy odwzorowawcze (rys. 1):

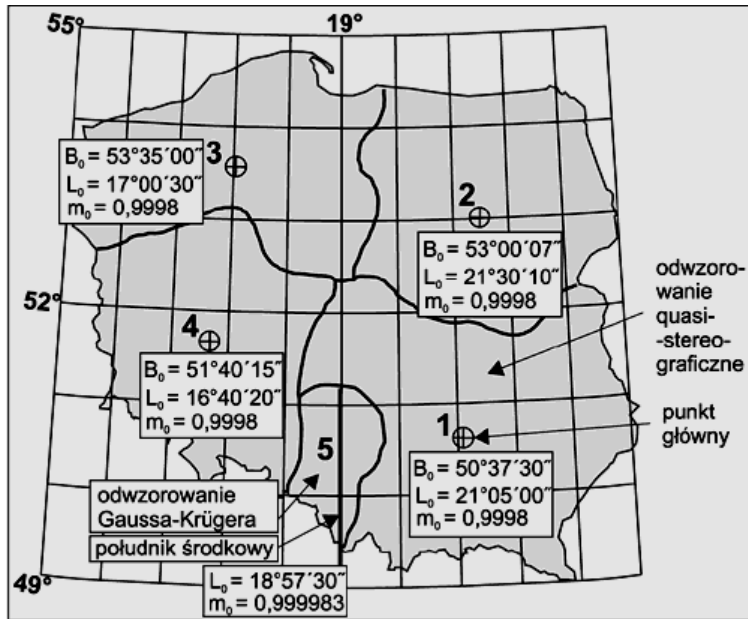


Rys. 1. Strefy układu **1942** (odwzorowania *Gaussa–Kriigera* elipsoidy **Krasowskiego**);
a – z podziałem na południkowe pasy 6°, b – z podziałem na pasy 3°

- Odwzorowanie w pasach południkowych o szerokości 6° . W wyniku tego w obszarze Polski powstały dwie strefy odwzorowawcze: z południkami środkowym (osiowymi) 15° i 21°, nazywamy je pomocniczo: **1942/15** (6) i **1942/21** (6). Odwzorowanie to miało zastosowanie dla map średnio- i małoskalowych (dla skal mniejszych od 1 : 5000). Zniekształcenia odwzorowawcze zmieniały się od 0 (na południku środkowym każdej strefy) do ok. 59 cm /km (na brzegach strefy)
- Odwzorowanie w pasach południkowych o szerokości 3° . W wyniku tego w obszarze Polski powstały cztery strefy odwzorowawcze: z południkami środkowym 15°, 18°, 21°, 24°, oznaczamy je pomocniczo: **1942/15** (3), **1942/18** (3), **1942/21** (3), **1942/24** (3).

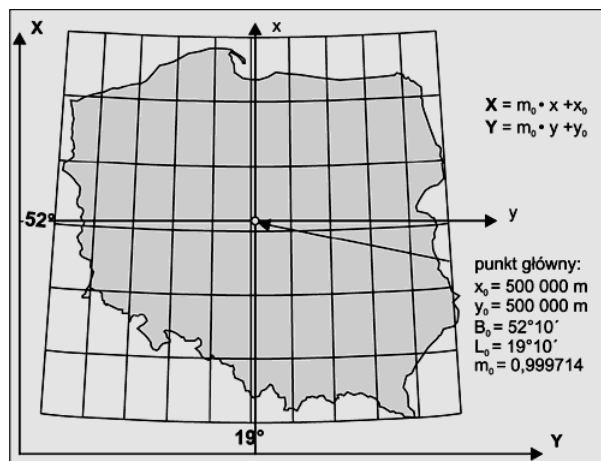
1942/21 (3), 1942/24 (3). Odwzorowanie to miało zastosowanie dla map wielkoskalowych (dla skal większych od 1:5000). Zniekształcenia odwzorowawcze na brzegach stref dochodziło do 15 cm/km.

W połowie lat 60-tych w służbie cywilnej zaczęto wprowadzać nowy, 5-cio strefowy układ odwzorowawczy (oparty na tym samym systemie elipsoidalnym) zwany krótko układem „1965”. Kraj został podzielony na pięć stref (rys. 2), przy czym w strefach 1, 2, 3, 4 zastosowano tzw. odwzorowanie quasi-stereograficzne (*Roussilhe projection*) (por. np. [2], [8]), natomiast w strefie 5 – modyfikowane odwzorowanie *Gaussa-Krügera*. Wyjaśnijmy już na wstępie, że odwzorowanie quasi-stereograficzne, jako wiernokątne odwzorowanie płaszczyznowe powierzchni elipsoidy, podobnie jak odwzorowanie stereograficzne sfery (powierzchni kuli), lokalizujemy podając położenie tzw. punktu głównego jako punktu styczności płaszczyzny z powierzchnią elipsoidy. Przyjmując ponadto skalę podobieństwa odwzorowania w punkcie głównym definiujemy rozkład zniekształceń liniowych na płaszczyźnie odwzorowawczej. W strefach 1–4 układu „1965” przyjęto skalę w punkcie głównym $m_0 = 0,9998$, co oznacza, że zniekształcenie odwzorowawcze w tym punkcie wynosi dokładnie -20 cm/km. Układ „1965” był przeznaczony głównie do tworzenia i „eksploatacji” mapy zasadniczej.



Rys. 2. Strefy i parametry charakterystyczne układu 1965

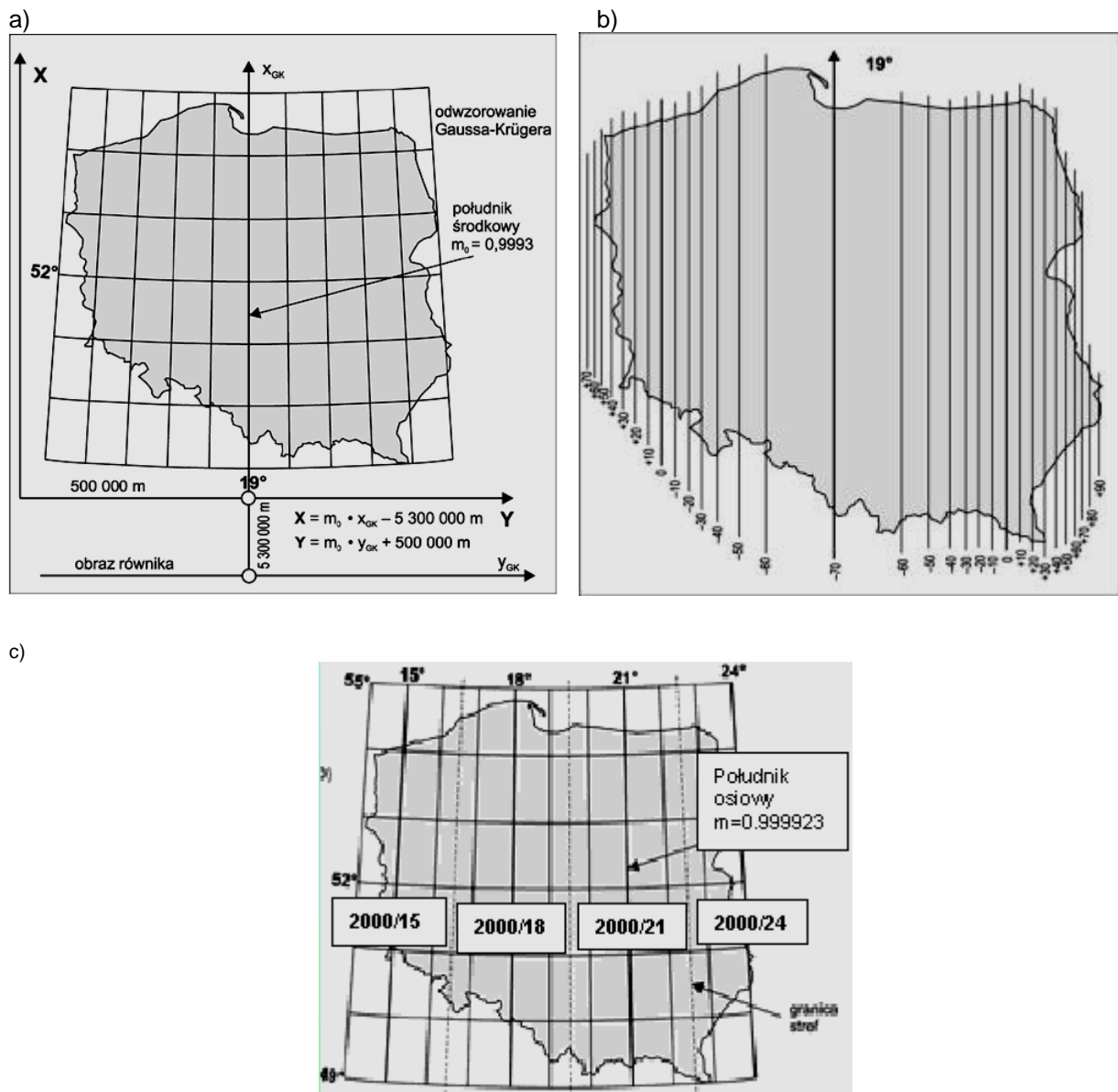
Dla tworzenia map przeglądowych w skalach 1 : 100 000 i mniejszych przyjęto natomiast układ oparty na jednostrefowym odwzorowaniu quasi-stereograficznym obszaru Polski nazwany **GUGiK-80** (rys. 3) . Punkt główny odwzorowania był przyjęty w przybliżeniu w „środku” obszaru Polski ($B_0 = 52^\circ 10'$, $L_0 = 19^\circ 10'$).



Rys.3. Jednostrefowy układ GUGiK-80 (odwzorowanie quasi-stereograficzne).

Jak już wspomniano we wstępie, od początku lat 90-tych podjęto prace mające na celu włączenie obszaru Polski do europejskiego systemu odniesień przestrzennych **ETRS** z układem **ETRF'89** i elipsoidą **GRS-80 (WGS-84)**. Zarówno dla celów opracowania osnów poziomych jak też dla potrzeb opracowań kartograficznych przyjęto dwa nowe systemy odwzorowawcze nowej elipsoidy:

- Jednostrefowe dla obszaru Polski odwzorowanie *Gausa – Krügera* z południkiem środkowym $L_0 = 19^\circ$ i skalą podobieństwa $m_0 = 0,9993$ (ostatnie założenie ma na celu równomierny rozkład zniekształceń liniowych, od -70 cm/km na południku środkowym do ok. 90 cm/km w skrajnych, wschodnich obszarach Polski) – rys. 4. Układ został nazwany skrótem **1992**. Obecnie już stanowi podstawę wykonywania nowych map w skalach $1: 10\ 000$ i większych. Ze względu na znaczne zniekształcenia liniowe nie został rekomendowany do wielkoskalowych opracowań kartograficznych.



Rys. 4. Nowe układy współrzędnych **1992, 2000** (aplikacje odwzorowania *Gausa–Krügera* elipsoidy **GRS-80**):
a) Układ 1992 - parametry definicyjne,
b) Układ 1992 – izolinie zniekształceń liniowych,
c) izolinie zniekształceń liniowych w [cm/km].

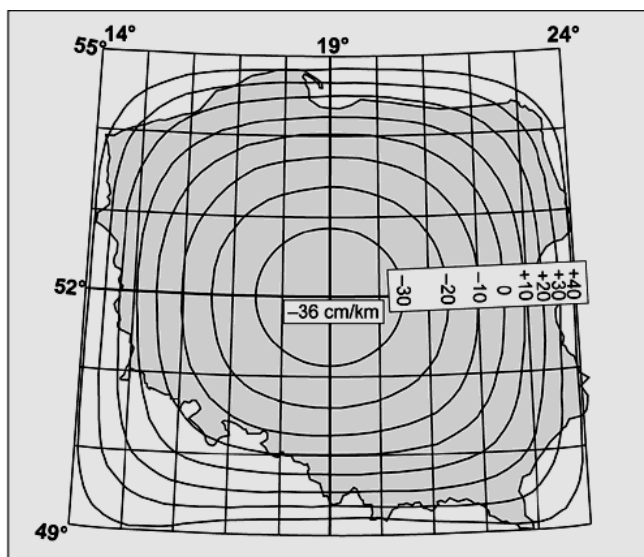
- Czterostrefowe odwzorowanie *Gaussa-Krügera* elipsoidy **GRS-80**, w pasach 3 – stopniowych zwane skrótowo układem **2000**. W tym przypadku, koncepcja układu nawiązuje do dawnego układu **1942**. Różnica polega jednak na odmienności przyjętych elipsoid odniesienia oraz na zastosowaniu dodatkowej skali podobieństwa (skali kurczenia na południku środkowym). W układzie **2000** zastosowano skalę $m_0 = 0.999923$, która oznacza kompromisowe rozłożenie zniekształceń liniowych, od 7.7 cm/km na południku środkowym strefy do maksymalnie ok. 7 cm/km na brzegu strefy.

Oprócz wymienionych już układów współrzędnych, pełna problematyka transformacyjna nie może pomijać także innych układów, z którymi możemy mieć do czynienia przy kompilacji różnych źródeł danych. Wymienimy tu przede wszystkim:

- Uniwersalne poprzeczne odwzorowanie Mercatora **UTM** (ang. *Universal Transverse Mercator projection*) stosowane na świecie do celów nawigacyjnych i wojskowych. Jest to odwzorowanie *Gaussa-Krügera* w pasach 6°, ze skalą na południku środkowym $m_0 = 0.9996$ (zniekształcenie na tym południku wynosi -40 cm/km). W tym miejscu należy się słowo komentarza dotyczące nazewnictwa. Otóż przyjmuje się w zasadzie, że oryginalne odwzorowanie *Gaussa-Krügera* (wiernokątne – walcowe – poprzeczne odwzorowanie elipsoidy) nie zmienia skali południka środkowego ($m_0 = 1$). W przypadku przeciwnym używamy też nazwy „modyfikowane odwzorowanie”. W krajach angosaskich przyjmuje się zaś nazwę „poprzeczne odwzorowanie *Mercatora*”. Odwzorowanie **UTM** zostało wprowadzone pierwotnie na elipsoidzie **HAYFORDA**, obecnie zaś zarówno w zastosowaniach cywilnych jak też wojskowych obowiązuje elipsoida **WGS-84**.

- Układy lokalne miast powstałe obok układu „**1965**” poprzez przyjęcie lokalnego odwzorowania *Gaussa-Krügera* (wyjątkowo dla obszarów większych) lub wprost płaszczyzny odniesienia przybliżającej lokalny przebieg geoidy. Dla niektórych miast południowej Polski (Kraków, Tarnów) układy lokalne powstawały też przez adaptację dawnych układów katastralnych. W zasadzie definicje układów lokalnych opierają się na takich uproszczeniach, które nie przewidują wprowadzenia jakichkolwiek redukcji odwzorowawczych obserwacji oraz redukcji na poziom odniesienia (zakłada się, że płaszczyzna odniesienia jest położona na średnim poziomie topograficznym obszarze). Pociąga to za sobą pewne błędy systematyczne, które mogą być zanedbywalne tylko przy pewnej ograniczonej rozciągłości i płaskości obszarowej układu.

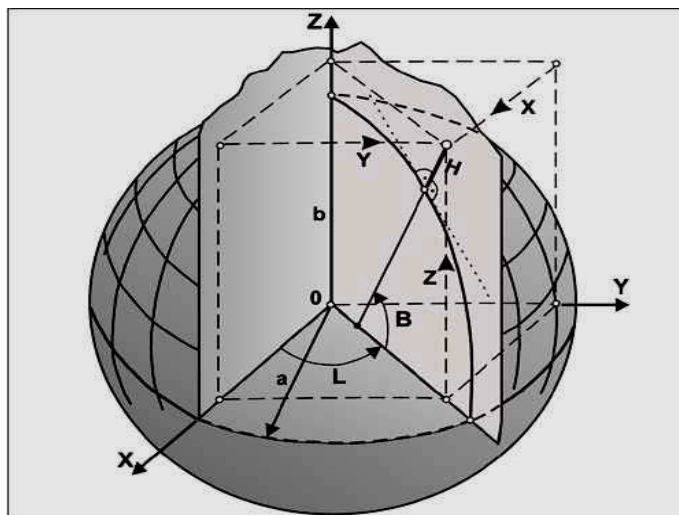
Ograniczając się do powyższej listy (najważniejszych praktycznie) układów należy stwierdzić, że za wyjątkiem układu „**1965**”, w strefach 1–4 oraz **GUGiK-80**, wszystkie pozostałe układy wywodzące się z elipsoidy **GRS-80** lub *Krasowskiego*, powstały jako aplikacje odwzorowania *Gaussa-Krügera*. Procedura realizacji tego odwzorowania stanowić będzie zatem istotny element procesu przeliczeń współrzędnych pomiędzy różnymi układami. Przyjęcie odwzorowań *Gaussa-Krügera* jako podstawy nowych definicji państwowych układów współrzędnych, np. jednolitego układu „**1992**”, ma swoją genezę w tradycji europejskiej (zwłaszcza niemieckiej). Nie znaczy to jednak, że odwzorowanie to jest najkorzystniejsze dla (bardziej kołowego niż wydłużonego) obszaru Polski pod względem wielkości maksymalnych zniekształceń liniowych. Korzystniejsze efekty (w stosunku do układu „**1992**” zniekształcenia liniowe mniejsze o ok. 50%) można uzyskać w oparciu o inne możliwe rodzaje odwzorowań konforemnych. Przykładem może być jednolite dla obszaru Polski odwzorowanie wiernokątne, nazwane umownie **PUK2000** (rys. 5), skonstruowane specjalnie dla map brązowych [6].



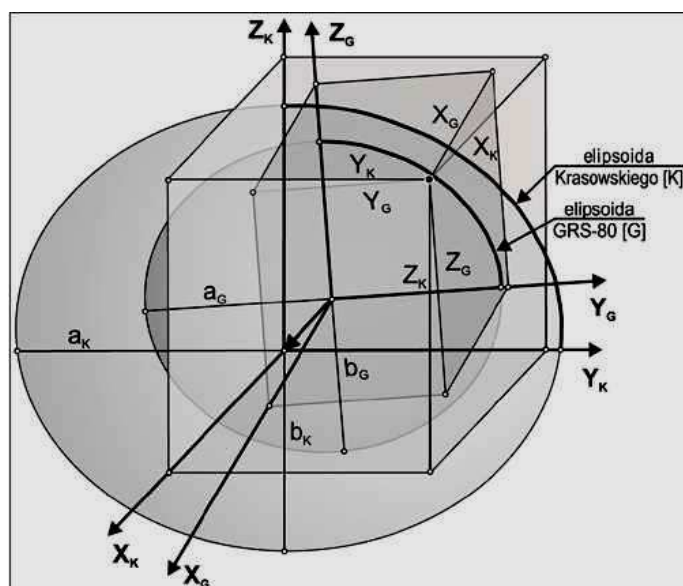
Rys. 5. Izolinie zniekształceń liniowych w układzie PUK2000.

3. Ogólne zasady transformacji pomiędzy układami odwzorowawczymi różnych elipsoid odniesienia

Przeliczenie współrzędnych pomiędzy układami płaskimi wywodzącymi się z różnych elipsoid odniesienia, np. pomiędzy układem 1965 a układem 1992 powinno się w zasadzie „odbywać” poprzez pośrednie przejście (transformację) pomiędzy układami współrzędnych geograficznych – geodezyjnych (krótko: geodezyjnych) B, L, H (szerokość, długość i wysokość elipsoidalna – rys. 6) lub współrzędnych kartezjańskich – centrycznych X, Y, Z (względnie „geocentrycznych”, jeśli środek elipsoidy pokrywa się ze środkiem mas Ziemi – co zakłada się dla elipsoidy **GRS-80**) obu elipsoid jak to pokazuje symbolicznie rysunek 8.

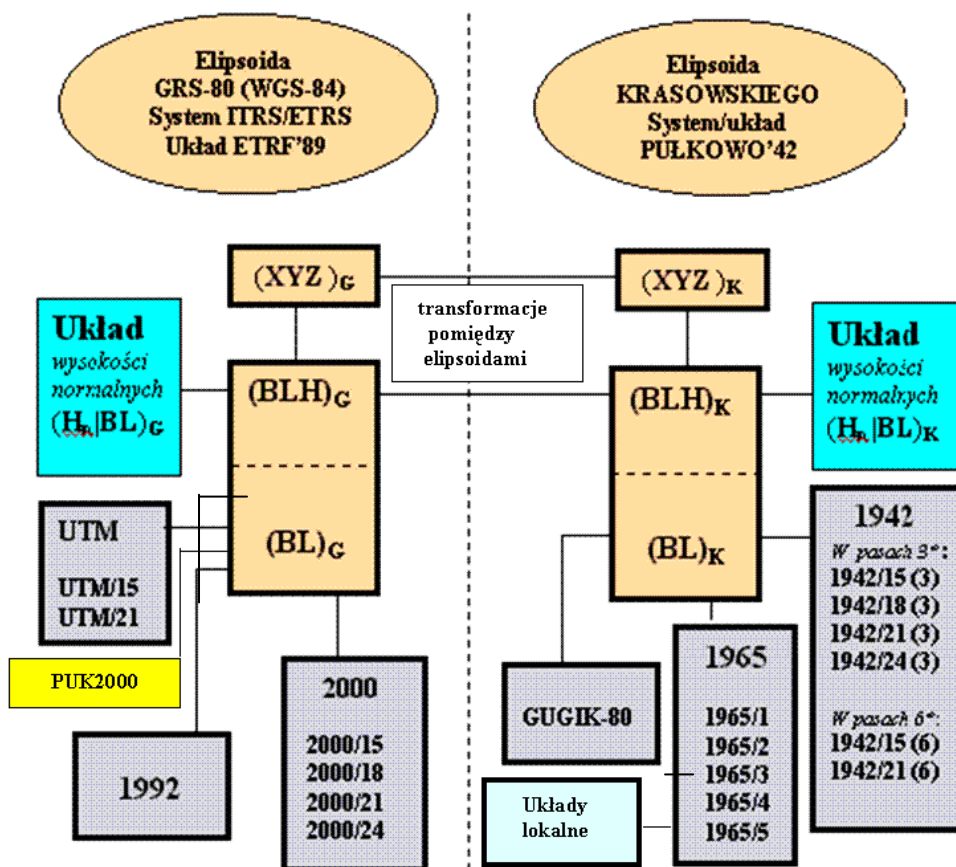


Rys. 6. Współrzędne geodezyjne BLH i kartezjańskie centryczne.



Rys. 7. Ilustracja wzajemnego położenia układów kartezjańskich

PRZEJŚCIA TRANSFORMACYJNE POMIĘDZY RÓŻNYMI UKŁADAMI WSPÓLRZĘDNYCH



Rys. 8. Schemat przejść transformacyjnych pomiędzy różnymi układami elipsoid

Rysunek 7 lustruje wzajemne położenie układów kartezjańskich elipsoid. Elipsoidy **KRASOWSKIEGO** i **GRS-80** nie są ściśle koncentryczne i równoległosiowe. Pomiedzy układami elipsoidalnymi obu elipsoid zachodzą związki transformacji przestrzennej przyjmowanej jako transformacja przez podobieństwo (7-mio parametrowa). Parametry tej transformacji (3 parametry przesunięcia, 3 parametry obrotów osiowych oraz 1 parametr zmiany skali wyznaczono (estymowano) w GUGiK w oparciu punkty sieci **POLREF**. Aby takie wyznaczenie mogło mieć miejsce punkty te musiały posiadać współrzędne wyznaczone w obu układach elipsoidalnych.

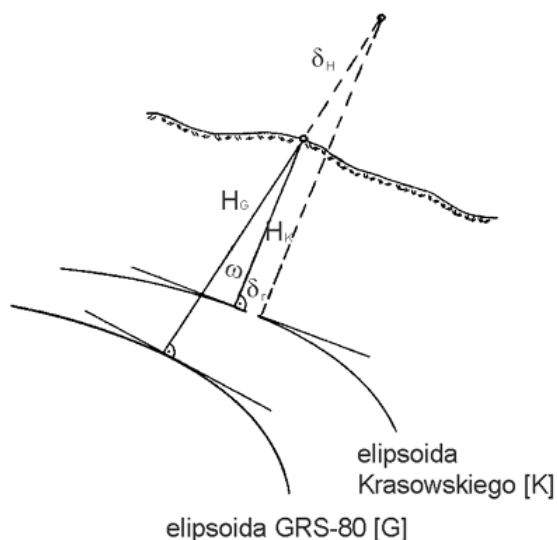
Każda z ukazanych na rysunku operacji przejścia z jednego układu do drugiego odbywa się za pośrednictwem ściśle określonych funkcji transformacyjnych (odzworowawczych) i ich parametrów liczbowych. Podamy je w kolejnych wykładach ograniczając się na razie do przedstawienia zasad ogólnych.

Powstaje praktyczne pytanie, czy można na przykład bezpośrednio przeliczyć współrzędne płaskie z układu „1965” do układu „1992” poprzez „złożenie” odpowiednich przekształceń składowych?. Wbrew temu co sugeruje się niekiedy w praktyce, przeliczenie takie nie jest formalnie poprawne bez „udziału” przynajmniej przybliżonej informacji o wysokości elipsoidalnej punktu w systemie, z którego wychodzimy (jak wskazuje rys. 7, aby przejść pomiędzy systemami należy do współrzędnych B,L dotychczas wysokość elipsoidalną H).

Rysunek 9 ukazuje w związku z tym jak zmiana wysokości punktu wpływa na zmianę jego położenia poziomego przy przejściu z jednej elipsoidy na drugą. Załóżmy, że wysokość została określona z pewnym błędem δ_H i oszacujmy jak wielce błąd ten wpływa na transformowane współrzędne płaskie. Z informacji o wzajemnym położeniu elipsoid wynika, że maksymalna kątowa rozwarłość normalnych (poprowadzonych z tego samego punktu na powierzchni ziemi do obu elipsoid) ma wartość rzędu $5''$. Łatwo wyliczamy, że wpływ błędu wysokości na przesunięcie „poziome” punktu wynosi:

$$\delta_r \approx \delta_H \cdot \omega'' / 206265,$$

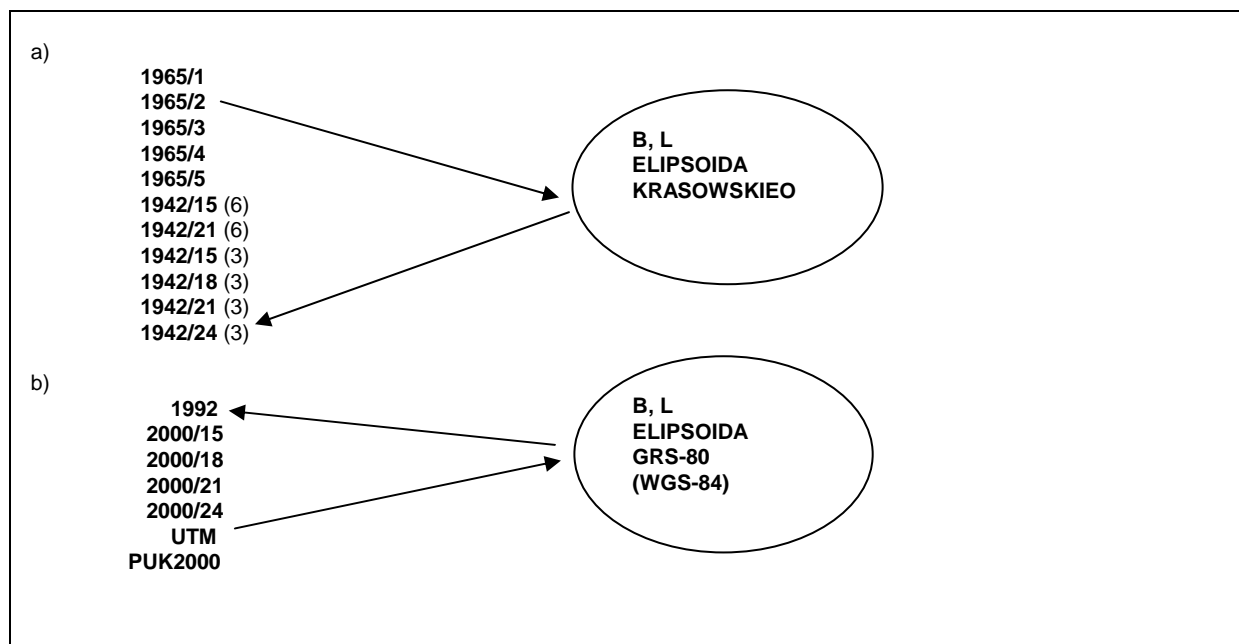
t.j. ok. 0.24 mm na 10 m błędowi wysokości (i odpowiednio proporcjonalnie). Dla wielu zadań geodezyjnych, za wyjątkiem problematyki osnów wyższych klas (np. w zadaniach przekształceń kartograficznych), wielkość ta może być rzeczywiście zaniedbywalna, nawet także gdy się założy, że punkt transformowany leży wprost na elipsoidzie ($H=0$). Musimy mieć jednak świadomość możliwego błędu systematycznego.



Rys. 9. Wpływ zmiany wysokości na poziome przesunięcie punktu transformowanego.

4. Transformacje pomiędzy układami tej samej elipsoidy

Problematyka powyższa wiąże się na przykład z przeliczeniem współrzędnych pomiędzy różnymi strefami tego samego układu albo pomiędzy różnymi układami tej samej elipsoidy. Uniwersalną metodą postępowania jest pośrednie przejście na współrzędne geodezyjne danej elipsoidy, co ilustruje rysunek 10. Drugi sposób polega na zastosowaniu bezpośrednich przejść pomiędzy strefami lub układami wywodzącymi się z tej samej elipsoidy. W tym celu wykorzystujemy własność wierności wszystkich interesujących nas odwzorowań konstruując odpowiednie wielomiany za pomocą analitycznej funkcji zmiennej zespolonej.



Rys. 10. Przykładowa ilustracja przejścia pomiędzy układami odwzorowawczymi tej samej elipsoidy odniesienia (strefy traktujemy jako odrębne układy); a) dla elipsoidy **KRASOWSKIEGO**, b) dla elipsoidy **GRS-80 (WGS-84)**

5. Krótka synteza

Ogólną klasyfikację stosowanych w Polsce układów współrzędnych przedstawia tabela 1.

Przy przeliczaniu współrzędnych pomiędzy układami odwzorowawczymi różnych elipsoid przechodzimy (w zasadzie) ścieżką przez współrzędne elipsoidalne obu systemów. Wiąże się to z uwzględnieniem przynajmniej przybliżonej informacji o wysokości elipsoidalnej punktu. Przykładowo, przechodząc z układu **1965** do układu **1992** stosujemy schemat przeliczeń:

$$(x, y)_{1965} \Rightarrow \left. \begin{matrix} (B, L)_{[K]} \\ [a] \quad H_{[K]} \end{matrix} \right\} [b] \Rightarrow (X, Y, Z)_{[K]} [c] \Rightarrow (X, Y, Z)_{[G]} [d] \Rightarrow (B, L, H)_{[G]} [e] \Rightarrow (x, y)_{1992}$$

jakkolwiek operacje oznaczone [b], [c], [d] można poskładać zastępując ją jednym przekształceniem $(B, L, H)_{[K]} \Rightarrow (B, L, H)_{[G]}$ (znacznik [K] oznacza elipsoidę *Krasowskiego*, zaś [G] – elipsoidę *GRS-80*). Bezpośrednie przeliczenie $(x, y)_{1965} \Rightarrow (x, y)_{1992}$ lub także $(B, L)_{[K]} \Rightarrow (B, L)_{[G]}$ jest możliwe przy zaniedbaniu wpływu wysokości.

Tabela 1

Klasyfikacja układów kartograficznych		
ZASTOSOWANE ODWZOROWANIE	ELIPSOIDA [SYSTEM (UKŁAD) ODNIESIENIA]	
	KRASOWSKIEGO[PUŁKOWO'42]	GRS-80 (WGS-84) [ETRF'89]
<i>Gaussa-Krügera</i>	1942/15 (6), 1942/21 (6) [pasy 6° 1942/15 (3), 1942/18 (3), [pasy 3° 1942/21 (3), 1942/24 (3) 1965/5 (strefa 5)	1992 2000/15, 2000/18, 2000/21, 2000/24 UTM
quasi-stereograficzne (<i>Roussilhe projection</i>)	1965/1 1965/2 1965/3 1965/4 GUGiK – 80	
inne odwzorowanie wiernokątne		PUK2000

Układy lokalne oparte na założeniu płaszczyzny odniesienia generalizującej lokalny przebieg geoidy lub zakładane jako adaptacje dawnych układów katastralnych nie poddają się powyższej systematyce.

Aby przeliczyć współrzędne pomiędzy układami (lub strefami układu) tej samej elipsoidy nie potrzeba „podpierać się” informacją wysokościową. W tym celu stosujemy dwa sposoby: Sposób podstawowy oznacza pośrednie przejście na współrzędne geodezyjne B, L:

$$(x, y)_{\text{UKŁAD 1}} \Rightarrow \underset{[e]}{(B, L)} \Rightarrow \underset{[f]}{(x, y)_{\text{UKŁAD 2}}}$$

(oznaczenia: UKŁAD 1, UKŁAD 2 zastępują nazwy pewnych układów lub stref układów). Możliwe jest też złożenie operacji pośrednich do pewnego przekształcenia wiernokątnego:

$$(x, y)_{\text{UKŁAD 1}} \Rightarrow (x, y)_{\text{UKŁAD 2}}$$

Obecnie zajmujemy się algorytmami podstawowych odwzorowań i ich aplikacjami w tworzeniu państwowych układów współrzędnych. Jak widać z tabeli 1, będą to odwzorowania: *Gaussa-Krügera* oraz quasi-stereograficzne, przy czym jak poucza teoria – por. *Panasiuk, Balcerzak, Gdowski* [8], odwzorowanie quasi-stereograficzne tworzy się łatwo z odwzorowania *Gaussa-Krügera*. Należy więc stwierdzić, że odwzorowanie *Gaussa-Krügera* stanowić będzie istotny element proceduralny w tworzeniu ścieżek przekształceń. Na początku zapoznamy się z pewnym uniwersalnym „narzędziem” do praktycznej realizacji odwzorowań konforemnych.

6. Przekształcenia konforemne płaszczyzn przy zastosowaniu wielomianu zespolonego

Następujący wzór

$$Z = a_0 + a_1 \cdot z + a_2 \cdot z^2 + \dots + a_n \cdot z^n = a_0 + z (a_1 + z (a_2 + z (a_3 \dots + z \cdot a_n))) \quad (1)$$

„przypomina nam” wielomianu stopnia n. Jest on przekształcony do tzw. postaci *Hornera*, która umożliwia łatwe obliczanie wartości wielomianu bez potrzeby podnoszenia do potęgi argumentu z (naprzemienne operacje mnożenia i dodawania).

Powyższe zadanie wydaje się bardzo proste. Niestety, założymy teraz, że wszystkie wielkości występujące w powyższym wzorze nie są liczbami rzeczywistymi lecz zespolonymi. Nie obawiamy się jednak tego pojęcia! W najprostszym rozumieniu rzeczy liczbą zespoloną nazywamy uporządkowaną parę liczb rzeczywistych. Bardzo „pasuje” nam aby taką parą liczb były na przykład współrzędne x , y punktu na płaszczyźnie lub ich proste przekształcenia (będące wynikiem przesunięcia lub zmiany skali układu). Przypuśćmy, że mamy dane dwie liczby zespolone (nazwy liczb oznaczamy dla wyróżnienia **boldem**):

$$\mathbf{z}_1 = (x_1, y_1), \quad \mathbf{z}_2 = (x_2, y_2)$$

Dodawanie i mnożenie liczb zespolonych wykonuje się następująco: Wynikiem dodawania jest liczba zespolona określona przez dodawanie odpowiadających składowych, czyli

$$\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

natomiast wynikiem mnożenia byłaby liczba zespolona określona następująco:

$$\mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$$

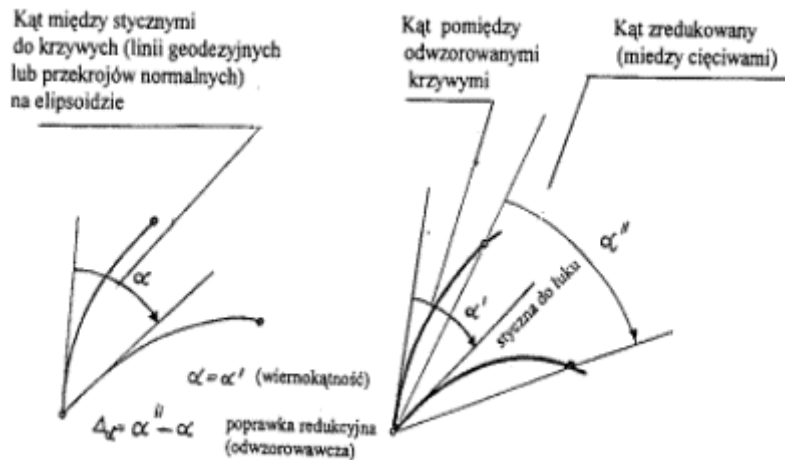
Przemienność i grupowanie działań w nawiasy jest analogiczne jak w zbiorze liczb rzeczywistych. Liczba zespolona, której druga składowa jest zerowa jest traktowana tak samo jak liczba rzeczywista (i odwrotnie). Znając tylko te najprostsze zasady możemy wykonać już „skomplikowane” rachunki, na przykład obliczyć wartość wielomianu (1) jako funkcji zespolonej (wykonując kolejne mnożenia i dodawania tak jak dla liczb rzeczywistych). Współczynniki wielomianu oznaczone $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ mogą być zarówno liczbami zespolonymi jak też rzeczywistymi. Wartością wielomianu będzie teraz pewna liczba zespolona $\mathbf{Z} = (X, Y)$. Co nam to daje? Otóż formuła (1) wyraża przede wszystkim przekształcenie dwuwymiarowych układów współrzędnych:

$$\begin{array}{ccc} (x, y) \Rightarrow (X, Y) & (\text{inaczej: } \mathbf{z} \Rightarrow \mathbf{Z}) & (2) \\ \text{[układ pierwotny } \Omega_1 \text{]} & \text{[układ wtórny } \Omega_2 \text{]} & \end{array}$$

ale najważniejszą własnością przenoszona tu niejako automatycznie z klasy tzw. funkcji analitycznych jest to, że przekształcenie takie ma zagwarantowaną cechę wiernokątności. Cechę tą posiadają skądinąd wszystkie rozważane układy odwzorowawcze. Formułę (1) można więc zastosować na przykład do wszystkich transformacji pomiędzy układami tej samej elipsoidy, a w szczególności przy przeliczaniu współrzędnych ze strefy na strefę tego samego układu. Według sprawdzonych już algorytmów, do przeliczenia współrzędnych pomiędzy sąsiednimi strefami układów „1965” wystarczają w zupełności wielomiany stopnia $n = 4$. W szerokim, nawet kilkudziesięciokilometrowym pasie wspólnego obszaru stref błąd numeryczny „przenoszenia” współrzędnych nie przekracza 0.1 mm (uwaga: dokładności numerycznej, nie należy utożsamiać z dokładnością empiryczną wynikającą z błędności wyznaczeń osnów geodezyjnych – ten problem będzie w naszym wykładzie przedmiotem odrębnych rozważań). Do przeliczeń współrzędnych pomiędzy różnymi układami tej samej elipsoidy odniesienia, na przykład pomiędzy układami 1992 i 2000, adekwatne będą zaś wielomiany stopnia $n = 6$ lub 7. Temat „skreślamy” jednak w sytuacji, gdy układy kartograficzne pochodzą z różnych elipsoid (zmiana elipsoid „burzy” cechę wzajemnej wiernokątności jakkolwiek błąd z tego tytułu może być zanedbywalny). Parametry wielomianów dla danej pary odwzorowań można wyznaczyć z wymaganą precyzją, przy wykorzystaniu narzędzi analityczno-numerycznych, a w szczególności metod aproksymacyjnych. Podobne zastosowania jak formuła (1) mają ogólniejsze funkcje analityczne, zwłaszcza zespolone wielomiany trygonometryczne (numerycznie efektywniejsze w szerszych obszarach zastosowań). W praktyce polskiej kartografii możemy ograniczyć się do prostszych w zapisie wielomianów potęgowych (algebraicznych), gdyż zachowują one wystarczającą dokładność w aplikacjach do państwowych układów kartograficznych.

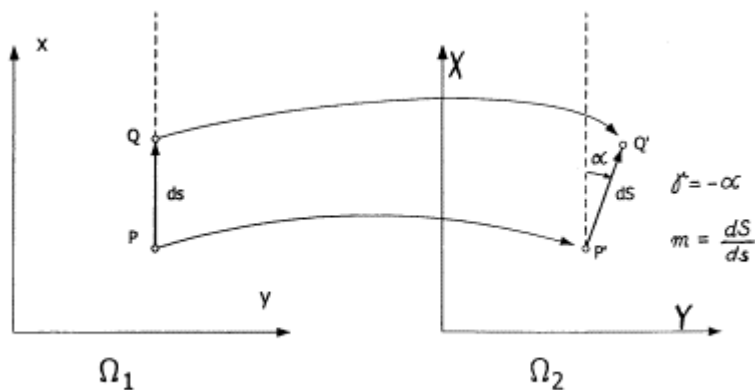
7. Wiernokątność i pole zniekształceń odwzorowawczych

W „orbicie” tematów ogólnych zatrzymajmy się na chwilę przy pojęciu wiernokątności odwzorowań. Wyobraźmy sobie 3 punkty na elipsoidzie oraz parę łączących je łuków linii geodezyjnych (mogą być też inne krzywe regularne) – por. rys. 11. Kąt między krzywymi mierzy się kątem pomiędzy stycznymi. Niech powierzchnia elipsoidy wraz z wyróżnionymi punktami będzie odwzorowana na płaszczyźnie Ω_1 . Wiernokątność odwzorowania oznacza, że zostają zachowane miary kątów pomiędzy odwzorowanymi łukami (inaczej: pomiędzy stycznymi do tych łuków). Analogiczna zasada będzie dotyczyć wiernokątności odwzorowania płaszczyzny Ω_1 na inną płaszczyznę Ω_2 , np. przy zastosowaniu formuły typu (1). Wiernokątność nie oznacza jednak zachowania takiej samej miary kąta pomiędzy odpowiednimi cięciwami łuków na płaszczyźnie. Różnica miary kąta pomiędzy cięciwami, a miary kąta pomiędzy odpowiednimi łukami (stycznymi) jest redukcją (poprawką) odwzorowawczą kąta. Faktycznie zostaje ona wyznaczona jako różnica poprawek odwzorowawczych kierunków (poprawka kierunku mierzy kątowe odchylenie obrazu linii geodezyjnej od odpowiadającej cięciwy). Poprawka ta może mieć wartości bardzo istotne – jej wielkość zależy od rodzaju odwzorowania, położenia stanowiska, długości i azymutów celowych. Należy ją uwzględnić przy opracowaniu państwowych osnów geodezyjnych wszystkich klas (darujemy sobie jedynie osnowy pomiarowe, gdzie ze względu na krótkie celowe i większe tolerancje błędów pomiarowych redukcje tego rodzaju są zanedbywalne).



Rys.11. Zasada wiernokątności odwzorowania, a poprawka odwzorowawcza kąta (kierunku).

Drugim ważnym pojęciem jest **elementarna skala długości** (m) lub parametr pochodny – elementarne zniekształcenie długości $\sigma = m-1$ (mnożąc np. przez 10^5 wyrażamy je w cm/km). Niech będzie dany na elipsoidzie punkt P o współrzędnych (B, L) oraz w bliskim „różniczkowym” jego otoczeniu drugi punkt Q odległy o ds . Punkty te odwzorują się na płaszczyźnie w odpowiednie punkty P' oraz Q', zaś łuk PQ o długości ds w odpowiadający łuk P'Q' o długości dS . Elementarną skalę liniową definiujemy stosunkiem $m = dS/ds$. W odwzorowaniach wiernokątnych jest ona wielkością stałą dla danego punktu, niezależną od azymutu łuku PQ i wyraża się funkcją położenia np. we współrzędnych geodezyjnych (B, L) lub odwzorowawczych (x, y) . Analogiczna definicja elementarnej skali liniowej (w znaczeniu relatywnym) odnosić się będzie również do wiernokątnego przekształcenia jednej płaszczyzny odwzorowawczej (Ω_1) w inną (Ω_2) , zgodnie z zapisem ogólnym (2). Przypuśćmy, że odcinek elementarny PQ o długości ds pokrywa się z osią ox na płaszczyźnie Ω_1 , zaś po przekształceniu przyjmuje on na drugiej płaszczyźnie położenie P'Q' (rys. 12) o kącie kierunkowym α i długość dS . Stosunek dS/ds wyznacza skalę elementarną przekształcenia (mierzącą lokalną „rozciągliwość” lub „kurczliwość” pola) natomiast kąt α mierzy lokalne skręcenie obrazu (charakterystyczne dla pewnego bliskiego otoczenia punktu). Pojęcie **konwergencji** (zbieżności południków), które oznaczamy przez γ jest tożsame z ujemną wartością skręcenia: $\gamma = -\alpha$. Biorąc pod uwagę, że m i γ mają cechy pary współrzędnych biegunowych, więc nazywamy je **składowymi pola (wektorowego) zniekształceń**.



Rys. 12. Ilustracja definicji składowych pola zniekształceń w przekształceniu wiernokątnym.

Powróćmy teraz do początkowej formuły (1), wyrażającej wiernokątne przekształcenie płaszczyzn. Otóż z tej formuły wynikają „eleganckie” wzory na wymienione składowe pola zniekształceń. Aby móc je zastosować potrzeba wprowadzić pojęcie pochodnej funkcji zespolonej (w naszym przypadku sprowadza się do pochodnej wielomianu zespolonego). W tym celu możemy „chwylowo” założyć, że mamy do czynienia z wielomianem rzeczywistym, a dopiero w wyniku wyznaczenia pochodnej „ujawnić tę zatajoną prawdę”. Pochodna będzie zatem wielomianem zespolonym stopnia $n-1$, zaś jej wartości będą parami

liczb określonymi dla konkretnych argumentów (x, y) . Oznaczając formalnie: $dZ/dz = (f_x, f_y)$, wyrazamy szukane składowe pola zniekształceń wzorami:

$$m = (f_x^2 + f_y^2)^{1/2} \quad (\text{elementarna skala liniowa})$$

$$\gamma = -\text{arc tg}(f_y/f_x) = -\text{arc sin}(f_y/m) \quad (\text{konwergencja})$$
(3)

8. Odwzorowanie *Gaussa-Krügera* „od kuchni”

W wykładach z geodezji precyzuje się, że jest to wiernokątne – walcowe–poprzeczne odwzorowanie elipsoidy. Interpretując je geometrycznie wyobrażamy sobie walec styczny do elipsoidy na całej długości pewnego południka, który nazywamy też **południkiem środkowym** lub osiowym odwzorowania. Prawa odwzorowawcze definiuje się jednoznacznie kładąc, obok generalnej wiernokątności, warunek prostoliniowości i izometryczności odwzorowania południka środkowego przy założeniu początku układu kartograficznego w punkcie przecięcia obrazu południka z obrazem równika (obraz południka jest osią odciętych zaś obraz równika jest osią rzędnych układu kartograficznego). Najbardziej jak się wydaje efektywna metoda realizacji tych warunków i utworzenia odpowiednich formuł odwzorowawczych, metoda *Krügera* [7, 9], stała się podstawą formuł roboczych układu „1992” opracowanych przez *Balcerzaka* [1, 14]. Sprowadza się ona do trzech etapów (rys.13):

- wiernokątne odwzorowanie całej powierzchni elipsoidy na całą sferę (powierzchnię kuli), znane jako odwzorowanie *Lagrange’a*,
- wiernokątne - walcowe - poprzeczne odwzorowanie sfery na płaszczyznę (odwzorowanie poprzeczne *Mercatora*),
- wiernokątne przekształcenie płaszczyzny *Mercatora* na płaszczyznę *Gaussa-Krügera* tak, aby był spełniony warunek odwzorowania dotyczący izometryczności południka środkowego.

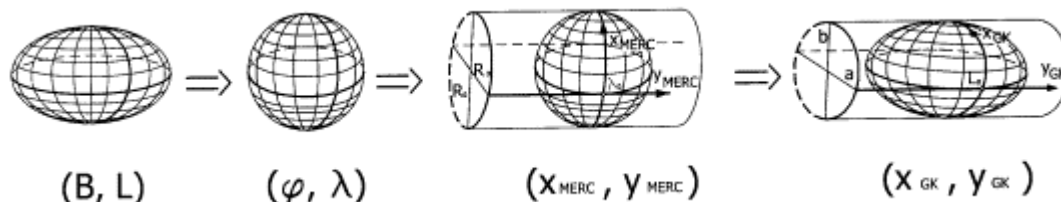
Gdyby modelem matematycznym Ziemi nie była elipsoida lecz kula, cały problem sprowadzałby się tylko do etapu drugiego, a odwzorowanie *Gaussa-Krügera* byłoby identyczne z odwzorowaniem poprzecznym *Mercatora*. Ogólny algorytm odwzorowania *Gaussa-Krügera* można zatem zapisać symbolicznie:

$$(B, L) \xRightarrow{[1]} (\varphi, \lambda | \lambda_0) \xRightarrow{[2]} (x_{MERC}, y_{MERC}) \xRightarrow{[3]} (x_{GK}, y_{GK})$$

Komplet wzorów odwzorowawczych obejmuje również przekształcenia odwrotne:

$$(x_{GK}, y_{GK}) \xRightarrow{[1']} (x_{MERC}, y_{MERC}) \xRightarrow{[2']} (\varphi, \lambda | \lambda_0) \xRightarrow{[3']} (B, L)$$

gdzie B, L oznaczają współrzędne geodezyjne punktu; L_0 – zadaną długość geodezyjną południka środkowego (południka styczności walca z powierzchnią elipsoidy), φ, λ – odpowiadające współrzędne geograficzne punktu na sferze *Lagrange’a*, przy czym $\lambda = L$ (odwzorowanie *Lagrange’a* zmienia jedynie szerokość B na φ); $\lambda_0 = L_0$ – długość geodezyjną południka środkowego w odwzorowaniu *Mercatora*, pokrywająca się z długością południka środkowego odwzorowania *Gaussa-Krügera*; x_{MERC}, y_{MERC} – współrzędne odwzorowania *Mercatora*, x_{GK}, y_{GK} – współrzędne odwzorowania *Gaussa-Krügera*.



Rys. 13. Schemat geometryczny realizacji odwzorowania *Gaussa-Krügera* metodą *Krügera*.

Tabela 2

ODWZOROWANIE GAUSSA–KRÜGERA $(B, \Delta L) \Leftrightarrow (x_{GK}, y_{GK}), \Delta L = L - L_0$	
algorytm przekształcenia „wprost” $(B, \Delta L) \Rightarrow (x_{GK}, y_{GK})$	algorytm przekształcenia „odwrotnego” $(x_{GK}, y_{GK}) \Rightarrow (B, \Delta L)$
<p>[1] Lagrange’a $(B, \Delta L) \Rightarrow (\varphi, \Delta\lambda)$</p> <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> <p> $U = 1 - e \cdot \sin(B), V = 1 + e \cdot \sin(B)$ $K = (U/V)^{e/2}, C = K \cdot \operatorname{tg}(B/2 + \pi/4)$ $(\pi = 3.141592653589793)$ </p> <p> $\varphi = 2 \cdot \operatorname{arc\,tg}(C) - \pi/2$ </p> <p> $\Delta\lambda = \Delta L$ (przyrost względem L_0) </p> <p> $m_1 = R_0 \cdot \cos(\varphi) / [R_n \cdot \cos(B)], \gamma_1 = 0$ </p>	<p>[3'] $(\varphi, \Delta\lambda) \Rightarrow (B, \Delta L)$</p> <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> <p> $B = \varphi + c_2 \cdot \sin(2 \cdot \varphi) + c_4 \cdot \sin(4 \cdot \varphi) +$ $+ c_6 \cdot \sin(6 \cdot \varphi) + \dots$ </p> <p> $\Delta L = \Delta\lambda$ </p>
<p>[2] Mercatora $(\varphi, \Delta\lambda) \Rightarrow (x_{MERC}, y_{MERC})$</p> <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> <p> $p = \sin(\varphi), q = \cos(\varphi) \cdot \cos(\Delta\lambda)$ $r = 1 + \cos(\varphi) \cdot \sin(\Delta\lambda)$ $s = 1 - \cos(\varphi) \cdot \sin(\Delta\lambda)$ </p> <p> $x_{MERC} = R_0 \cdot \operatorname{arc\,tg}(p/q)$ $y_{MERC} = 0.5 \cdot R_0 \cdot \ln(r/s)$ </p> <p> $m_2 = 1 / [r \cdot s]^{1/2}, \gamma_2 = \operatorname{arc\,tg}[p \cdot \operatorname{tg}(\Delta\lambda)]$ </p>	<p>[2'] $(x_{MERC}, y_{MERC}) \Rightarrow (\varphi, \Delta\lambda)$</p> <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> <p> $\alpha = x_{MERC} / R_0, \beta = y_{MERC} / R_0$ $w = 2 \cdot \operatorname{arc\,tg}[\exp(\beta)] - \pi/2$ </p> <p> $\varphi = \operatorname{arc\,sin}[\cos(w) \cdot \sin(\alpha)]$ $\Delta\lambda = \operatorname{arc\,tg}[\operatorname{tg}(w) / \cos(\alpha)]$ </p>
<p>[3] $(x_{MERC}, y_{MERC}) \Rightarrow (x_{GK}, y_{GK})$</p> <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> <p> $\mathbf{z} = [(x_{MERC} - x_0) \cdot s, y_{MERC} \cdot s]$ </p> <p> $\mathbf{z}_{GK} =$ $a_0 + \mathbf{z}(a_1 + \mathbf{z}(a_2 + \mathbf{z}(a_3 + \mathbf{z}(a_4 + \mathbf{z}(a_5 + \mathbf{z}a_6))))))$ $\mathbf{z}_{GK} = (x_{GK}, y_{GK})$ </p> <p>Składowe pola zniekształceń m_3, γ_3 są liczone według ogólnych wzorów (3)</p>	<p>[1'] $(x_{GK}, y_{GK}) \Rightarrow (x_{MERC}, y_{MERC})$</p> <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> <p> $\mathbf{z} = [(x_{GK} - a_0) \cdot s, y_{GK} \cdot s]$ </p> <p> $\mathbf{z}_{MERC} =$ $b_0 + \mathbf{z}(b_1 + \mathbf{z}(b_2 + \mathbf{z}(b_3 + \mathbf{z}(b_4 + \mathbf{z}(b_5 + \mathbf{z} \cdot b_6))))))$ $\mathbf{z}_{MERC} = (x_{MERC}, y_{MERC})$ </p>

Uwaga: współrzędne B, L, φ, λ we wzorach tabeli 2 są wyrażone w mierze radialnej. Ostatnie przekształcenie [3] W algorytmie „wprost” i pierwsze przekształcenie [1'] w algorytmie odwrotnym jest uproszczoną alternatywą wielomianów trygonometrycznych, które zastosowano w programie **GEONET_unitrans** (zob. też Wytyczne Techniczne G-1.10).

Tabela 3

ODWZOROWANIE GAUSSA–KRÜGERA			
PARAMETRY PROCEDUR			
[zastosowanie wielomianów dopuszczalne dla: B od 48° do 56° i ΔL od -6° do $+6^\circ$]			
PROCEDURA	PARAMETR	ELIPSOIDA	
		GRS-80	KRASOWSKIEGO
OBJAŚNIENIE	NAZWA		
$(B, \Delta L) \Rightarrow (\varphi, \Delta\lambda) \Rightarrow (x_{MERC}, y_{MERC})$ pierwszy mimośród elipsoidy $(e^2 = (a^2 - b^2)/a^2)$ półosie elipsoidy: spłaszczenie $f = (a-b)/a$.. promień sfery Lagrange'a ...	e	0.0818191910428	0.0818133340169
	a	6378137.00000	6378245.00000
	b	6356752.31414...	6356863.01877...
	f	1:298.257222101	1: 298.3
	R_0	6367449.14577..	6367558.496875..
$(x_{MERC}, y_{MERC}) \Rightarrow (x_{GK}, y_{GK})$ parametr normujący .. parametr centrujący .. współczynniki wielomianu: .	s	2.0 E-6	2.0 E-6
	x_0	5760000.00000000	5760000.00000000
	a_0	5765181.11148097	5765180.49758330
	a_1	499800.81713800	499800.87112376
	a_2	-63.81145283	-63.80172299
	a_3	0.83537915	0.83512434
	a_4	0.13046891	0.13044472
	a_5	-0.00111138	-0.00111100
$(x_{GK}, y_{GK}) \Rightarrow (x_{MERC}, y_{MERC})$ parametr normujący . parametr centrujący współczynniki wielomianu:	s	2.0 E-6	2.0 E-6
	$x_0' = a_0$	5765181.11148097	5765180.49758330
	b_0	5760000.00000000	5760000.00000000
	b_1	500199.26224125	500199.20821246
	b_2	63.88777449	63.87801231
	b_3	-0.82039170	-0.82014111
	b_4	-0.13125817	-0.13123362
	b_5	0.00101782	0.00101747
$(\varphi, \Delta\lambda) \Rightarrow (B, \Delta L)$ współczynniki szeregu trygonometrycznego	C_2	0.0033565514856	0.0033560696018
	C_4	0.0000065718731	0.0000065699863
	C_6	0.0000000176466	0.0000000176390
	C_8	0.0000000000540	0.0000000000540

Tabela 2 przedstawia wzory, natomiast tabela 3 – niezbędne parametry, zarówno dla elipsoidy GRS-80 jak też dla elipsoidy Krasowskiego. Widzimy, że w ostatnim etapie przekształcenia „wprost” i w pierwszym etapie przekształcenia odwrotnego stosujemy właśnie wielomian zmiennej zespolonej według ogólnej formuły (1) (jak już wspomnieliśmy nie jest to droga „obligatoryjna” – można użyć wielomian trygonometryczny). Zauważmy, że dla „uruchomienia” i wykonania procedury odwzorowawczej wystarczy zadać długość geodezyjną L_0 południka środkowego. Resztę definiuje geometria wybranej elipsoidy. Wzory Lagrange’a i Mercatora w odwzorowaniu „wprost” wyrażają się bezpośrednio za pomocą znanych funkcji

elementarnych i przestępnych. Niestety, odwzorowanie odwrotne do *Lagrange'a* (powrót ze sfery na elipsoidę) nie da się wyrazić w podobny sposób – stosuje się szereg trygonometryczny (w pełni wystarczają jednak tylko 3-4 kolejne wyrazy rozwinięcia o współczynnikach parzystych). Wielkość R_0 oznacza taki promień *sfery Lagrange'a*, której długość południka odpowiada „precyzyjnie” długości południka elipsoidy. Jak wynika z wzorów *Mercatora*, promień R_0 pełni w istocie funkcję skalującą (możnaby przyjąć też równie dobrze sferę *Lagrange'a* o jednostkowym promieniu, zaś odpowiedni faktor skalujący – dopiero w ostatecznym przekształceniu na płaszczyznę *Gausa-Krügera*). Wszystkie wzory programuje się łatwo w dowolnym języku algorytmicznym. Pragnę jednak przestrzec przed ewentualnym „bagatelizowaniem” błędów zaokrąglenia. W związku z tym wszelkie stałe i zmienne powinny być deklarowane w zwiększonej precyzji, co najmniej na długości 8 bajtów (przy tej sposobności miejmy na uwadze to, że np. liczba π powinna być brana co najmniej z dokładnością do kilkunastu cyfr).

Jak liczyć lokalne składowe pola zniekształceń w odwzorowaniu *Gausa-Krügera*? Złożenie 3 przekształceń konforemnych upoważnia do tego, by ostateczną elementarną skalę liniową wyrazić jako iloczyn skal odwzorowań składowych:

$$m_{GK} = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \quad (4)$$

m_1 – skala odwzorowania *Lagrange'a*, m_2 – skala odwzorowania *Mercatora*, m_3 – skala odwzorowania *Gausa-Krügera* względem odwzorowania *Mercatora*. W analogicznym ale sumacyjnym związku pozostaje konwergencja:

$$\gamma_{GK} = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \quad (5)$$

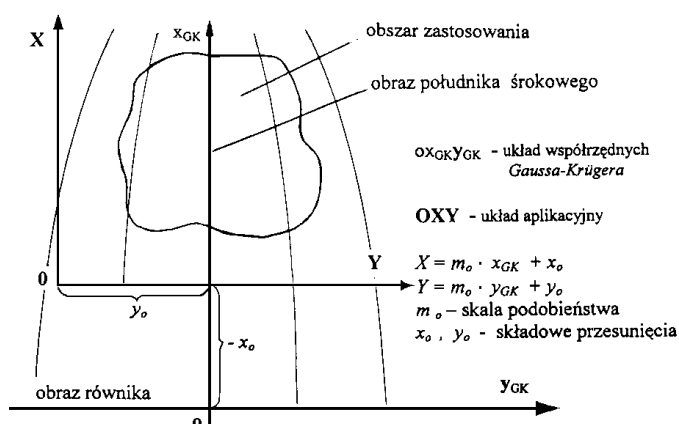
Stosowne wzory podaje tabela 2. Więcej informacji w tym temacie zawierają nowe Wytyczne Techniczne G-1.10 [10].

9. Aplikacje odwzorowania *Gausa-Krügera* (tworzenie układów kartograficznych 1942, 1992, 2000, UTM oraz 1965 w strefie 5)

Odwzorowanie *Gausa-Krügera* sprowadziliśmy ostatecznie do dwukierunko działającej formuły:

$$(B, \Delta L) \Leftrightarrow (x_{GK}, y_{GK}), \text{ przy czym } \Delta L = L - L_0$$

Odcięta x_{GK} jest mierzona względem obrazu równika jako osi Oy płaskiego układu, zaś rzędna y_{GK} względem obrazu południka środkowego jako osi Ox tegoż układu. Długość geodezyjna południka środkowego, którą oznaczamy L_0 , stanowi natomaist parametr „lokalizujący” odwzorowanie *Gausa-Krügera* na danej elipsoidzie (zgodnie z geometryczną interpretacją odwzorowania *Gausa-Krügera*, wzdłuż tego południka jest styczna powierzchnia walcowa z powierzchnią elipsoidy). Parametry liczbowe formuł odwzorowawczych będą zależne również od samych parametrów geometrycznych (deficyjnych) elipsoidy (a, b) lub (a, f). Konkretnie aplikacje odwzorowania *Gausa-Krügera* (jak np. w postaci układów: „1992”, „2000”, „1942”) będą już związane ze skalowaniem (parametr m_0) i przesunięciem układu współrzędnych x_{GK}, y_{GK} o pewne wartości x_0, y_0 (rys. 14).



Rys. 14. Ogólna zasada aplikacji odwzorowania *Gausa-Krügera*

Wielkość m_0 zwana skalą na południku środkowym, pełni równocześnie funkcję skali podobieństwa konkretnej aplikacji względem oryginalnego odwzorowania *Gaussa-Krügera*.

Jeśli $m_0 < 1$ to parametr ten ma na celu równomierne rozłożenie (w interesującym nas obszarze) bezwzględnych wartości zniekształceń liniowych odwzorowania. Parametry przesunięcia układu współrzędnych oznaczone x_0 , y_0 mają zasadniczo dwa cele: w przypadku y_0 chodzi o to, by zapobiec występowaniu ujemnych wartości rzędnych lub szczególnie wyróżnienie danej strefy układu, zaś w przypadku x_0 obcięcie dużych wartości x_{GK} (mierzonych od obrazu równika). Podamy w dalszym ciągu parametry aplikacyjne odwzorowania dla konkretnych układów współrzędnych.

Aplikacje odwzorowania *Gaussa-Krügera* dla układów **1942, 1965 – strefa 5, 1992, 2000** przedstawia tabela 4. Aplikacja dla układu **UTM** jest analogiczna jak w przypadku układu **1942** z podziałem na pasy 6° . Różnica polega jednak na odmienności przyjętych elipsoid odniesienia i skali m_0 a także na sposobach konstruowania współrzędnych pełnych (specyfika określania pozycji w układzie **UTM** wynika z jego międzynarodowego zastosowania jako układu wojskowo-nawigacyjnego).

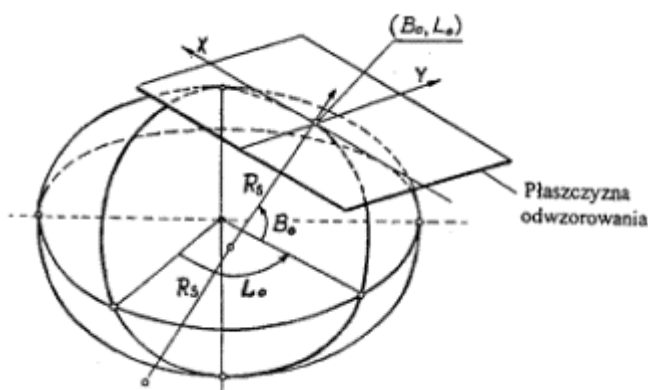
Tabela 4

APLIKACJE ODWZOROWANIA GAUSSA-KRÜGERA				
Wzory ogólne: $X_{UKŁAD\ APLIKACYJNY} = m_0 \cdot X_{GK} + x_0$ $Y_{UKŁAD\ APLIKACYJNY} = m_0 \cdot Y_{GK} + y_0$				
UKŁAD STREFA	ELIPSOIDA	parametry stałe		
		m_0	x_0	y_0
1942/15(6) 1942/21(6)	Krasowskiego	1.0	0	3500000
1942/15(3) 1942/18(3) 1942/21(3) 1942/24(3)		1.0	0	4500000
1965–strefa 5		1.0	0	5500000
		1.0	0	6500000
		1.0	0	7500000
		1.0	0	8500000
		0.999983	-4700000	237000
1992 2000/15 2000/18 2000/21 2000/24 UTM /33 UTM /34	GRS-80 (WGS-84)	0.9993	-5300000	500000
		0.999923	0	5500000
		0.999923	0	6500000
		0.999923	0	7500000
	0.999923	0	8500000	
	0.9996	0	500000 *)	
	0.9996	0	500000 *)	

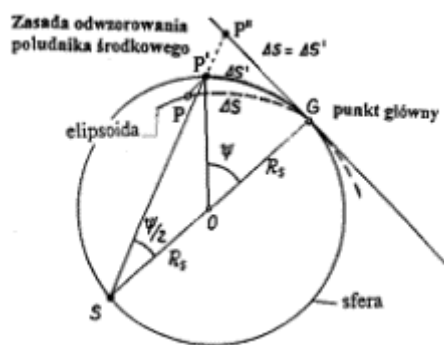
*) **/33** **/34** oznaczają strefy Polskie układu **UTM** według numerów słupów podziałowych międzynarodowej mapy świata; w nomenklaturze wojskowej (NATO-wskiej) i nawigacyjnej, zamiast współrzędnych pełnych w układzie **UTM** stosuje się specjalną systematykę alfanumeryczną określania pozycji. W aplikacjach dla potrzeb cywilnych w Polsce stosuje się również współrzędne pełne konstruowane analogicznie jak w układach strefowych **1942/15(6)**, **1942/21(6)**. Podobną zasadę przyjęto w programach aplikacyjnych **TRANSPOL** [10] i **GEONET_unitrans** [15].

10. Odwzorowanie quasi-stereograficzne i jego aplikacje

Elementem „lokacyjnym” odwzorowania quasi-stereograficznego jest punkt przyłożenia płaszczyzny odwzorawczej (B_o , L_o) zwany też **punktem głównym lub środkowym odwzorowania** (rys. 15) (podobną rolę lokacyjną w odwzorowaniu *Gaussa-Krügera* pełni południk środkowy L_o). Zakładana dodatkowo skala długości m_o w tym punkcie (skala podobieństwa odwzorowania) jest już szczególnym parametrem aplikacyjnym.



Rys. 15. Punkt główny jako element lokacyjny odwzorowania quasi-stereograficznego



Rys. 16. Zasada odwzorowania południka środkowego

Geneza odwzorowania quasi-stereograficznego jest bardzo prosta (rys.16): Określamy sferę styczną do płaszczyzny i elipsoidy w punkcie głównym o promieniu R_S równym średniemu promieniowi krzywizny elipsoidy w tym punkcie. Dowolny łuk południka środkowego Δs mierzony na elipsoidzie od punktu głównego (B_o) do danego punktu (B) rozciągamy na sferze (w tym samym przekroju południkowym). Ze sfery rzutujemy już na płaszczyznę, stosując rzut stereograficzny (środek rzutów leży w odległości $2 \cdot R_S$ od punktu głównego). W ten sposób realizuje się wprawdzie tylko przekształcenie łuku południka środkowego (przechodzącego przez punkt główny) w odciętą osi ox układu kartezjańskiego ale do pełnej definicji odwzorowania quasi-stereograficznego wystarczy „dorzucić” jeden warunek: wierność. Odwzorowanie łuku południka środkowego wyraża zależność:

$$x / (2 \cdot R_S) = \operatorname{tg} [\Psi] = \operatorname{tg} [\Delta s / (2 \cdot R_S)] \quad (6)$$

gdzie:

$$R_S = (R_M \cdot R_N)^{1/2}$$

(7)

$$R_M = a \cdot (1 - e^2) / C^3; \quad R_N = a / C; \quad C = [1 - e^2 \cdot \sin^2(B_0)]^{1/2}$$

(promień krzywizny w punkcie głównym: R_S – średni, R_M – w przekroju południkowym, R_N – w przekroju poprzecznym, tj. pierwszego wertkału; a , e – półosi równikowa i mimośród elipsoidy). Załóżmy teraz, że istnieje równoległe odwzorowanie *Gausa-Krügera* z południkiem środkowym (L_0) przechodzącym przez punkt główny. Wówczas łuk Δs we wzorze (6) możemy wyrazić oczywiście jako różnicę odciętych $\Delta x_{GK} = x_{GK} - s_0$, gdzie s_0 oznacza długość łuku południka od równika do punktu głównego. W ten sposób formuła (6) wiąże obrazy południka środkowego z dwóch odwzorowań (*Gausa-Krügera* i quasi-stereograficznego), ale nie tylko to. Wiernokątność obu odwzorowań sprawia, zależność (6) uogólnia się do postaci zespolonej, wyrażającej „kompletne” wzajemne przekształcenie płaszczyzn obu odwzorowań *) (rys.17)

$$W = \operatorname{tg}(w) \quad (8)$$

gdzie:

$$w = (u, v), \quad u = (x_{GK} - s_0) / (2 \cdot R_S), \quad v = y_{GK} / (2 \cdot R_S)$$

$$W = (U, V), \quad U = x / (2 \cdot R_S), \quad V = y / (2 \cdot R_S),$$

tg oznacza funkcję tangensa zespolonego; x_{GK}, y_{GK} – współrzędne punktu w odwzorowaniu *Gausa-Krügera*, x, y – współrzędne w odwzorowaniu quasi-stereograficznym (środek układu pokrywa się z odwzorowanym punktem głównym). Można stąd słusznie wnioskować, że znając wzory odwzorowania *Gausa-Krügera* możemy niemal „natychmiast” zrealizować odwzorowanie quasi-stereograficzne, $(x_{GK}, y_{GK}) \Rightarrow (x, y)$, poprzez formułę (8). Dla konkretnej aplikacji uwzględniamy ponadto: przyjętą skalę podobieństwa m_0 , mnożąc przez nią współrzędne x, y oraz parametry przesunięcia (X_0, Y_0) :

$$X = m_0 \cdot x + X_0, \quad Y = m_0 \cdot y + Y_0, \quad (9)$$

Dane do konkretnych aplikacji w układzie „1965” oraz „GUGiK-80” podane są w tabeli 5.



Rys. 17. Ilustracja przekształcenia pomiędzy płaszczyznami odwzorowawczymi.

Z przekształcenia (8) wynika „natychmiast” zespolona zależność odwrotna

$$w = \operatorname{arc\,tg}(W) \quad (10)$$

która definiuje odwrotne odwzorowanie quasi-stereograficzne w stosunku do odwzorowania *Gausa-Krügera* (aby powrócić na elipsoidę należy skorzystać z odwrotnego odwzorowania *Gausa-Krügera*).

Tabela 5

UKŁAD "1965" – parametry odwzorowań quasi-stereograficznych			
STREFA 1	$B_o = 50^\circ 37' 30''$	$L_o = 21^\circ 05' 00''$	$m_o = 0.9998$
	$X_o = 5467000.0000 \text{ m}$	$R_s = 6382390.1649837 \text{ m}$	$s_o = 5610467.5770417 \text{ m}$
	$Y_o = 4637000.0000 \text{ m}$		
STREFA 2	$B_o = 53^\circ 00' 07''$	$L_o = 21^\circ 30' 10''$	$m_o = 0.9998$
	$X_o = 5806000.0000 \text{ m}$	$R_s = 6384119.4273046 \text{ m}$	$s_o = 5874939.8741150 \text{ m}$
	$Y_o = 4603000.0000 \text{ m}$		
STREFA 3	$B_o = 53^\circ 35' 00''$	$L_o = 17^\circ 00' 30''$	$m_o = 0.9998$
	$X_o = 5999000.0000 \text{ m}$	$R_s = 6384536.7935655 \text{ m}$	$s_o = 5939644.7701117 \text{ m}$
	$Y_o = 3501000.0000 \text{ m}$		
STREFA 4	$B_o = 51^\circ 40' 15''$	$L_o = 16^\circ 40' 20''$	$m_o = 0.9998$
	$X_o = 5627000.0000 \text{ m}$	$R_s = 6383155.1651299 \text{ m}$	$s_o = 5726819.6678288 \text{ m}$
	$Y_o = 3703000.0000 \text{ m}$		
UKŁAD "GUGIK-80" (parametry odwzorowanie quasi-stereograficznego)			
	$B_o = 52^\circ 10' 00''$	$L_o = 19^\circ 10' 00''$	$m_o = 0.9997142857$
	$X_o = 500000.0000 \text{ m}$	$R_s = 6383515.6754446 \text{ m}$	$s_o = 5781989.9020447 \text{ m}$
	$Y_o = 500000.0000 \text{ m}$		
Objaśnienia:			
B_o, L_o – współrzędne geodezyjne punktu głównego,			
X_o, Y_o – współrzędne płaskie punktu głównego,			
m_o – skala długości w punkcie głównym,			
R_s – średni promień krzywizny powierzchni elipsoidy w punkcie głównym,			
s_o – długość łuku południka elipsoidy od równika do punktu głównego strefy,			
Uwaga dotycząca układu GUGiK-80: przy faktycznej realizacji układu dla map topograficznych w skalach 1 : 100000 dokonano dodatkowej (zamierzonej) translacji układu o kilkadziesiąt metrów. Dokładne wielkości składowych tej translacji nie są jednak odnotowane w dostępnych zasobach archiwalnych.			

*) Przekształcenie odwzorowania *Gaussa-Krügera* w odwzorowanie quasi-stereograficzne przedstawiają *Panasjuk., Balcerzak i Gdowski* w pracy [8]. Analogiczną formułę tangensa zespolonego ale tylko w uproszczeniu do odwzorowań sfery przedstawiał referat: *Kadaj R.* „Wzajemne przekształcenie płaszczyzn odwzorowań kartograficznych” . VI Ogólnopolskim Seminarium Kół Naukowych Geodetów, Wrocław, 13–14. XII 1968.

Wzory (8) i (10) opierają się na funkcjach zespolonych, które są dostępne w bibliotekach algorytmicznych języków programowania. Możemy je również przedstawić w formie szeregów potęgowych, sprowadzonych do znanej nam już postaci *Homera* (1). Stosując w pełni „bezpieczne” dla wszelkich zastosowań obcięcie szeregów otrzymujemy:

$$W = w \cdot (a_1 + w^2 \cdot (a_3 + w^2 \cdot (a_5 + w^2 \cdot (a_7 + w^2 \cdot a_9)))) \quad (11)$$

$$w = W \cdot (b_1 + W^2 \cdot (b_3 + W^2 \cdot (b_5 + W^2 \cdot (b_7 + W^2 \cdot b_9)))) \quad (12)$$

gdzie parametry (rzeczywiste) są wiadomymi współczynnikami rozwinięć funkcji tg i arctg :

$$\begin{aligned} a_1 = 1, \quad a_3 = 1/3, \quad a_5 = 2/15, \quad a_7 = 17/315, \quad a_9 = 62/2835 \\ b_1 = 1, \quad b_3 = -1/3, \quad b_5 = 1/5, \quad b_7 = -1/7, \quad b_9 = 1/9 \end{aligned}$$

Sposób realizacji formuł (11), (12), wobec czynionych już objaśnień ogólnego wzoru (1) nie wymaga komentarza.

Podstawowe formuły odwzorowawcze należy jednak „dowartościować” informacją o składowych pola deformacji. Ponieważ korzystamy „po drodze” z odwzorowania *Gaussa-Krügera*, więc dla odpowiednich parametrów odwzorowania quasi-stereograficznego zachodzą zależności:

$$m_{qs} = m_{GK} \cdot m_{TG} \quad \gamma_{qs} = \gamma_{GK} + \gamma_{TG} , \quad (13)$$

gdzie: m_{GK} γ_{GK} – elementarna skala i konwergencja liczona dla odwzorowania *Gaussa-Krügera*, zaś czynnik m_{TG} oraz składnik konwergencji γ_{TG} wynikają tylko z przekształcenia płaszczyzny *Gaussa-Krügera* w płaszczyznę odwzorowania quasi-stereograficznego. Wielkości te możemy wyznaczyć zgodnie z ogólnymi regułami (3) określonymi dla wielomianów zespolonych. Z innymi sposobami wyznaczeń składowych pola zniekształceń (metody: empiryczna i aproksymacyjna) możemy zapoznać się w nowych Wytycznych Technicznych G-1.10 [10].

11. Algorytmy alternatywne dla „1965” lub GUGiK-80

Zarówno odwzorowanie quasi-stereograficzne (zrealizowane w strefach 1–4 układu „1965”) jak też odwzorowanie *Gaussa-Krügera* (zrealizowane w strefie 5) można otrzymać przez przekształcenie innego, prostszego odwzorowania tej samej elipsoidy (*Krasowskiego*). Tym wyjściowym odwzorowaniem dla „konstrukcji” układu „1965” może być odwzorowanie poprzeczne *Mercatora*, skonstruowane na sferze *Lagrange’a*, będącej tym razem wiernokątnym odwzorowaniem powierzchni elipsoidy *Krasowskiego*. Z uwagi na wiernokątność wszystkich odwzorowań szukane przekształcenia dają się utworzyć przy wykorzystaniu wielomianów zespolonych typu (1). Podajemy w dalszym ciągu uzyskane funkcje odwzorowawcze dla wszystkich stref układu „1965” przy wykorzystaniu współrzędnych odwzorowania poprzecznego *Mercatora*.

Odwzorowanie „wprost” dla każdej strefy układu „1965” jak też dla układu **GUGiK-80** można wyrazić ogólnym, aproksymującym wielomianem zespolonym:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_0 + m_0 \cdot \sum_{j=1 \dots 7} a_j \cdot \underline{z}^j \quad (14)$$

Tabela 6

UKŁAD „1965”	
PRZEKSZTAŁCENIE WPROST $(x,y)_{\text{MERCATOR}} \Rightarrow (x,y)_{1965}$ (lub GUGIK-80)	PRZEKSZTAŁCENIE ODWROTNE $(x,y)_{1965} \Rightarrow (x,y)_{\text{MERCATOR}}$ (lub GUGIK-80)
STREFA 1 Parametry ogólne: $\mu_0 = 5605231.5783400$ m (współrzędna x Mercatora dla punktu głównego strefy), $c = 3.0 \cdot 10^{-6}$ (faktor normujący), $m_0 = 0.9998$ $X_0 = 5467000.0$ $Y_0 = 5637000.0$	
$a_1 = 333227.06241016$	$b_1 = 333439.63814784$
$a_2 = -28.66752173$	$b_2 = 28.69495794$
$a_3 = 75.89527836$	$b_3 = -75.98720225$
$a_4 = 0.00654018$	$b_4 = -0.03924797$
$a_5 = 0.02065121$	$b_5 = 0.03125071$
$a_6 = -0.00000048$	$b_6 = 0.00004019$
$a_7 = 0.00000572$	$b_7 = -0.00001533$
STREFA 2 Parametry ogólne: $\mu_0 = 5869806.1756747$, $c = 3.0 \cdot 10^{-6}$, $m_0 = 0.9998$ $X_0 = 5806000.0$ $Y_0 = 5603000.0$	
$a_1 = 333181.98278495$	$b_1 = 333484.75263389$
$a_2 = -28.09506011$	$b_2 = 28.13336471$
$a_3 = 75.90551490$	$b_3 = -76.03878487$
$a_4 = 0.00638023$	$b_4 = -0.03846955$
$a_5 = 0.02062653$	$b_5 = 0.03132252$
$a_6 = -0.00000048$	$b_6 = 0.00003943$
$a_7 = 0.00000570$	$b_7 = -0.00001543$
STREFA 3 Parametry ogólne: $\mu_0 = 5934541.5223989$, $c = 3.0 \cdot 10^{-6}$, $m_0 = 0.9998$ $X_0 = 599000.0$ $Y_0 = 3501000.0$	
$a_1 = 333171.10289125$	$b_1 = 333495.64277002$
$a_2 = -27.92544886$	$b_2 = 27.96626180$
$a_3 = 75.90797481$	$b_3 = -76.05123941$
$a_4 = 0.00633462$	$b_4 = -0.03823854$
$a_5 = 0.02062056$	$b_5 = 0.03133989$
$a_6 = -0.00000049$	$b_6 = 0.00003921$
$a_7 = 0.00000557$	$b_7 = -0.00001529$
STREFA 4 Parametry ogólne: $\mu_0 = 5721624.2630263$, $c = 3.0 \cdot 10^{-6}$, $m_0 = 0.9998$ $X_0 = 5627000.0$ $Y_0 = 3703000.0$	
$a_1 = 333207.11959919$	$b_1 = 333459.59487530$
$a_2 = -28.43973268$	$b_2 = 28.47206252$
$a_3 = 75.89981582$	$b_3 = -76.01001779$
$a_4 = 0.00647498$	$b_4 = -0.03893842$
$a_5 = 0.02064019$	$b_5 = 0.03128254$
$a_6 = -0.00000043$	$b_6 = 0.00003984$
$a_7 = 0.00000572$	$b_7 = -0.00001534$

Tabela 6 c.d.

STREFA 5 Parametry ogólne: $\mu_0 = 5500000.000000$, $c = 3.0 \cdot 10^{-6}$, $m_0 = 0.999983$ $X_0 = 5505266.68476559 \cdot m_0 - 4700000$ $Y_0 = 237000.0$			
$a_1 =$	333245.21908033	$b_1 =$	333421.47088486
$a_2 =$	-28.84063895	$b_2 =$	28.86352249
$a_3 =$	0.16624973	$b_3 =$	-0.16142833
$a_4 =$	0.02625267	$b_4 =$	-0.02635834
$a_5 =$	-0.00010275	$b_5 =$	0.00008948
$a_6 =$	-0.00001004	$b_6 =$	0.00001020
$a_7 =$	0.00000089	$b_7 =$	-0.00000087
GUGiK - 80 Parametry ogólne: $\mu_0 = 5776816.1737694$, $c = 2.0 \cdot 10^{-6}$, $m_0 = 0.9997142857$ $X_0 = 500000.0$ $Y_0 = 500000.0$			
$a_1 =$	499796.58237407	$b_1 =$	500203.50041702
$a_2 =$	-63.71657636	$b_2 =$	63.79440613
$a_3 =$	256.16907833	$b_3 =$	-256.57010451
$a_4 =$	0.03260886	$b_4 =$	-0.19629050
$a_5 =$	0.15669795	$b_5 =$	0.23766431
$a_6 =$	-0.00000519	$b_6 =$	0.00045217
$a_7 =$	0.00009754	$b_7 =$	-0.00026247
Uwagi: <ul style="list-style-type: none"> • Błąd numeryczny w obszarze stref nie wykracza poza poziom setnych części milimetra. • W strefie 5 wartość μ_0 jest wielkością przyjętą jako umowny parametr centrujący współrzędnych Mercatora. 			

gdzie:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= (X, Y) - \text{współrzędne ostateczne w układzie „1965”}, \\ \mathbf{Z}_0 &= (X_0, Y_0) - \text{współrzędne punktów głównych stref 1–4 układu „1965”} \\ &\quad \text{lub umownego punktu na południku środkowym strefy 5,} \\ \underline{\mathbf{z}} &= (x_M - \mu_0, y_M) \cdot c \quad (c - \text{faktor normujący}) \end{aligned}$$

unormowany argument zespolony jako „przesunięte” współrzędne odwzorowania Mercatora (x_M, y_M) . W tabeli 6 podano wykazy współczynników wielomianów dla poszczególnych stref i układu GUGiK-80 oraz parametry: μ_0 - centrująca wartość współrzędnej Mercatora dla punktu głównego strefy, c - faktor normujący argument wielomianu. Brakujące parametry dla realizacji formuł odwzorowawczych „pobieramy” z tabeli 5 (parametry centrujące X_0, Y_0 w układzie „1965”). Wszystkie wielomiany są stopnia 7. To wystarczy, by w obszarze każdej strefy uzyskać poprawne współrzędne z dokładnością wyższą niż wymagania praktyczne (błąd numeryczny nie powinien przekraczać 0.1 mm. Przypomnijmy jeszcze, że pozyskanie wejściowych współrzędnych Mercatora w oparciu o współrzędne geodezyjne B, L było omówione przy odwzorowaniu Gaussa-Kröigera.

Odwzorowanie odwrotne do opisanego realizujemy za pomocą zespolonych szeregów potęgowych, także 7 stopnia:

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}_0 + \sum_{j=1 \dots 7} b_j \cdot \underline{\mathbf{z}}^j \quad (15)$$

gdzie:

$$\mathbf{z} = (x_M, y_M), \quad \mathbf{z}_0 = (\mu_0, 0), \quad \underline{\mathbf{z}} = (X - X_0, Y - Y_0) \cdot c / m_0$$

W ostateczności, w przekształceniu odwrotnym opieramy się na poznanych wcześniej formułach odwrotnego odwzorowania Mercatora, dążąc do wyznaczenia współrzędnych B, L .

12. Przeliczenie współrzędnych geodezyjnych B,L,H na współrzędne kartezjańskie – centryczne X,Y,Z dowolnej elipsoidy i zadanie odwrotne.

12.1. Współrzędne geodezyjne lub kartezjańskie - centryczne jako uniwersalny adres punktu.

Pozycja dowolnego punktu na powierzchni Ziemi jest określana jednoznacznie na przykład za pomocą współrzędnych geodezyjnych (B,L,H) lub kartezjańskich – geocentrycznych (X,Y,Z) w umownym systemie elipsoidalnym. Te dwa rodzaje współrzędnych traktujemy jako informacje równoważne, ponieważ przejście (przeliczenie) pomiędzy nimi (B,L,H) \leftrightarrow (X,Y,Z) dokonuje się w oparciu o ściśle, wzajemnie jednoznaczne formuły matematyczne. Tak więc można powiedzieć, że współrzędne (B,L,H) lub (X,Y,Z) określają równoważnie pozycję lub pełnią funkcję „adresu” punktu (także w znaczeniu dosłownym, o czym można się przekonać oglądając wizytówki niektórych firm geodezyjnych).

Współrzędne B, L określają pozycję „poziomą” (rzut punktu na powierzchnię elipsoidy), natomiast wysokość elipsoidalna H uzupełnia te dane do pełnej informacji przestrzennej (trójwymiarowej). Należy w tym miejscu dodać, że sama wysokość elipsoidalna (geometryczna) nie zastąpi jednak potrzebnych w praktyce wysokości niwelacyjnych (normalnych, czy może quasi-ortometrycznych) w przyjętym systemie wysokości, względem naturalnej powierzchni poziomej – geoidy, a raczej jej praktycznej generalizacji – quasi-geoidy. Z drugiej strony, same wysokości niwelacyjne, bez dołączonego modelu geoidy (quasi-geoidy) względem elipsoidy, nie dają pełnej informacji przestrzennej (geometrycznej) o położeniu punktu. Doświadczymy więc w różnych zadaniach geodezyjnych, że kompletna informacja wysokościowa powinna zawierać dane pozwalające na odtworzenie zarówno wysokości geometrycznej (elipsoidalnej) jak też wysokości niwelacyjnej punktu w przyjętym systemie wysokości. Należy podkreślić, że wiele aktualnych zadań geodezyjnych (w tym transformacje pomiędzy różnymi systemami elipsoidalnymi, tworzenie sieci GPS) ma w pełni charakter trójwymiarowy, w odróżnieniu od zadań klasycznych lub o charakterze lokalnym, sprowadzających się do metod geodezji płaskiej (dwuwymiarowej) lub tzw. płasko-wysokościowej (oddzielnie płaskiej i wysokościowej).

12.2. Przeliczenie: [B, L, H] \Rightarrow [X, Y, Z]

Niech punkt P ma współrzędne geodezyjne (B, L, H). Formuły przeliczenia ich na współrzędne kartezjańskie (X,Y,Z) wywodzą się z ogólnych zależności (rys. 18):

$$X = x_0 + \Delta x, \quad Y = y_0 + \Delta y, \quad Z = z_0 + \Delta z \quad (16)$$

gdzie x_0, y_0, z_0 oznaczają współrzędne rzutu normalnego P_0 punktu P na powierzchnię elipsoidy, zaś $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ - składowe wektora P_0P o długości H (powinien być spełniony warunek $H^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$). Szukane związki ze współrzędnymi B, L, H, które możemy wysondować z rysunku 2, są następujące:

$$\begin{aligned} x_0 &= r_0 \cdot \cos(L), & \Delta x &= \Delta r \cdot \cos(L), \\ y_0 &= r_0 \cdot \sin(L), & \Delta y &= \Delta r \cdot \sin(L), \\ z_0 &= R_N \cdot \sin(B) - q, & \Delta z &= H \cdot \sin(B) \end{aligned} \quad (17)$$

gdzie:

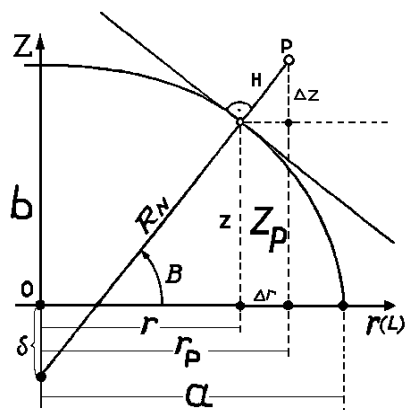
$$r_0 = R_N \cdot \cos(B), \quad \Delta r = H \cdot \cos(B), \quad (18)$$

R_N jest długością odcinka normalnej, mierzoną od punktu P_0 do punktu S przecięcia z osią obrotu elipsoidy – jest to zarazem promień krzywizny przekroju poprzecznego (pierwszego wertykału) elipsoidy w punkcie P_0 (dla szerokości B), wyrażający się wzorem:

$$R_N = a / [1 - e^2 \cdot \sin^2(B)]^{1/2}$$

(przypomnijmy, że użyliśmy go już we wzorach (7) obok promienia krzywizny przekroju południkowego R_M oraz średniego promienia krzywizny ; e – mimośród, $e^2 = (a^2 - b^2) / a^2$; a, b – półosie elipsoidy). Parametr q (rys. 18) jako pionowe przesunięcie środka krzywizny przekroju poprzecznego względem środka elipsoidy wyraża się wzorem:

$$q = R_N \cdot e^2 \cdot \sin(B) = a \cdot e \cdot c / (1 - c^2)^{1/2}, \quad c = e \cdot \sin(B) \quad (19)$$



Rys. 18. Elementy przekroju południkowego elipsoidy

Składając wzory (16 - 19) otrzymujemy formuły

$$\begin{aligned} X &= (R_N + H) \cdot \cos(B) \cdot \cos(L) \\ Y &= (R_N + H) \cdot \cos(B) \cdot \sin(L) \\ Z &= (R_N + H) \cdot \sin(B) - q \end{aligned} \quad (20)$$

(podkreślmy, że wielkości R_N i q są również funkcjami szerokości B).

12.3. Przeliczenie odwrotnie: $[X, Y, Z] \Rightarrow [B, L, H]$

Aby dokonać przeliczenia odwrotnego należałoby odwrócić zależności (20), wyznaczając z nich B, L i H w oparciu o X, Y, Z . Mając na uwadze to, że w definicji promienia R_N oraz wielkości q kryje się również szerokość B , odwrócenie formuł (20) nie jawi się jako równie proste zadanie (można je sprowadzić do rozwiązania równania algebraicznego stopnia wyższego od 2). Dlatego posługujemy się chętnie metodami kolejnych przybliżeń. Jedną z prostych metod polega na

wykorzystaniu następującej zależności, którą można otrzymać z (20) lub z rysunku 18 (zob. np. [2]):

$$B = \arctg [(Z + q) / r]; \quad r = (X^2 + Y^2)^{1/2} \quad (21)$$

(r – odległość punktu P od osi obrotu elipsoidy), przy czym określona wyżej wzorem (19) „względnie mała” wielkość q jest (niestety) istotną funkcją B , dlatego zapis (21) nie oznacza jeszcze jawnego rozwiązania. Formułę (21) można jednak użyć do tworzenia kolejnych przybliżeń B_0, B_1, B_2, \dots niewiadomej B (stosownie do tego parametr q jako funkcja B przyjmuje wartości kolejnych przybliżeń q_0, q_1, q_2, \dots).

Algorytm: $[X, Y, Z] \Rightarrow B$

- Krok 0: przyjmujemy $q = q_0 = 0$ i obliczamy B wg wzoru (6) notując je jako B_0 (przybliżenie początkowe),
- Krok 1: obliczamy przybliżoną wartość q_1 zgodnie z wzorem (19) jako funkcję B_0 , a następnie nowe przybliżenie B_1 szerokości B według wzoru (21)
- Krok 2: obliczamy przybliżenie q_2 zgodnie z wzorem (19) jako funkcję $B = B_1$, a następnie aktualne przybliżenie B_2 szerokości B według wzoru (21).
- ... itd.

Proces zatrzymujemy, jeśli różnica kolejnych przybliżeń jest mniejsza niż założony dopuszczalny błąd numeryczny wyznaczenia B. Zwykle konieczną dokładność otrzymuje się po kilku krokach.

Obliczenie brakujących współrzędnych L, H nie przedstawia już trudności:

$$L = \arccos (X/r) = \arcsin (Y/r), \quad (22)$$

$$H = (\Delta r^2 + \Delta z^2)^{1/2} * (-1 \text{ jeśli } \Delta z < 0 \text{ lub } \Delta r < 0) \quad (23)$$

przy czym przyrosty Δr , Δz obliczamy ze wzorów:

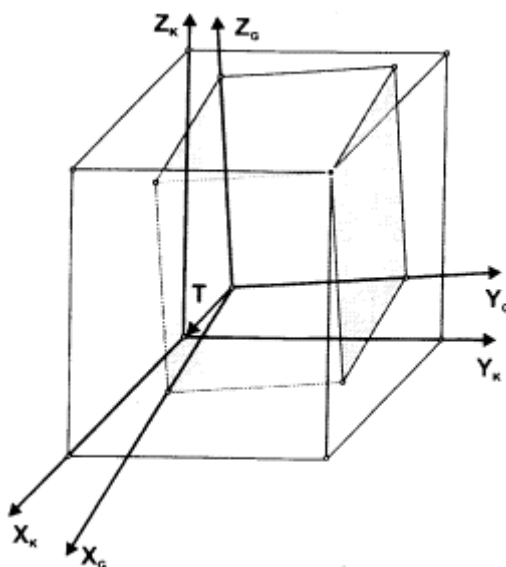
$$\Delta r = r - r_0 = r - R_N \cdot \cos (B), \quad (24)$$

$$\Delta z = Z - z_0 = Z - R_N \cdot (1 - e^2) \cdot \sin(B).$$

Współrzędne B, L wyrażone w radianach przeliczamy ostatecznie do miary stopniowej.

13. Przeliczenia pomiędzy elipsoidami

Przypuśćmy, że punkt P ma współrzędne $[X, Y, Z]_K$ w centrycznym układzie kartezjańskim elipsoidy Krasowskiego. Pytamy się, jakie będą analogiczne współrzędne $[X, Y, Z]_G$ tego punktu w układzie elipsoidy GRS-80 (WGS-84) (rys.19). Możemy oczywiście stawiać również zadanie odwrotne (zgodnie z ogólnym schematem przeliczeń współrzędnych sformułowanym na rys. 8).



Rys. 19. Układy kartezjańskie elipsoid GRS-80 (G) i Krasowskiego (K)

Jak już wspominaliśmy, przeliczenie takie jest problemem transformacji przestrzennej (trójwymiarowej) układów współrzędnych związanych z różnymi elipsoidami odniesienia. Dla wykonania konkretnych zadań praktycznych parametry takiej transformacji muszą być oczywiście znane. Na takie okoliczności wyznaczono je w GUGiK w oparciu o punkty sieci POLREF (na podstawie zbiorów danych archiwalnych w systemie PUŁKOWO'42 oraz nowych pomiarów w systemie ETRF'89 dysponowano współrzędnymi kartezjańskimi punktów w obu układach elipsoidalnych). Nie będziemy wnikać w sam proces estymacji tych parametrów. Ograniczymy się jedynie do podania finalnych formuł praktycznych i ich charakterystyk dokładnościowych.

Najbardziej ogólna formuła liniowej transformacji przestrzennej wyraża się następującymi wzorami (użyjemy znaczników K i G dla odróżnienia konkretnie stosowanych elipsoid: Krasowskiego i GRS-80 (WGS-84)):

13. 1. Transformacja $[X,Y,Z]_G \Rightarrow [X,Y,Z]_K$

$$\begin{aligned} X_K &= c_{11} \cdot X_G + c_{12} \cdot Y_G + c_{13} \cdot Z_G + T_x \\ Y_K &= c_{21} \cdot X_G + c_{22} \cdot Y_G + c_{23} \cdot Z_G + T_y \\ Z_K &= c_{31} \cdot X_G + c_{32} \cdot Y_G + c_{33} \cdot Z_G + T_z \end{aligned} \quad (25)$$

lub w bardziej „eleganckiej” postaci macierzowej: $\mathbf{X}_K = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}_G + \mathbf{T}$ gdzie \mathbf{T} jest wektorem przesunięcia środków układów, określonym w układzie elipsoidy Krasowskiego; \mathbf{C} – macierzą współczynników (parametrów) c_{ij} ($i, j := 1, 2, 3$). Aby powyższa transformacja zachowywała kształty (konforemność) figur (co w naszym zadaniu jest wymogiem podstawowym) macierz \mathbf{C} musi być proporcjonalna do tzw. macierzy ortonormalnej. Dla takiej macierzy zachodzi związek:

$$\mathbf{C}^{-1} = \text{const.} \cdot \mathbf{C}^T, \text{const.} > 0 \quad (26)$$

Jeśli przyjmiemy $\text{const.} = 1/m^2$, to liczba m będzie skalą podobieństwa dla transformacji (25).

W naszym konkretnym zastosowaniu przyjmuje się dodatkowe uproszczenie formuły (25), wynikające stąd, że układy kartezjańskie rozważanych elipsoid mają osie zbliżone do równoległych (odchylenia od równoległości nie przekraczają 1”). Uproszczenie to polega na przyjęciu następujących podstawień:

$$c_{11} \approx c_{22} \approx c_{33} \approx m; \quad c_{12} \approx -c_{21} \approx \varepsilon_x; \quad c_{13} \approx -c_{31} \approx -\varepsilon_y; \quad c_{23} \approx -c_{32} \approx \varepsilon_z; \quad (27)$$

gdzie: $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ oznaczają kąty obrotów wokół kolejnych osi układu pierwotnego. Zgodnie z najnowszym projektem instrukcji technicznej G-2 [11], ostatecznie uzgodnione parametry transformacji, z uwzględnieniem uproszczeń w postaci (27), są następujące (dane te zostały przekazane przez GUGiK do wiadomości Europejskiej Podkomisji IAG: CERCO, WG VIII):

$$\begin{aligned} T_x &= -33.4297 \text{ m}, \quad T_y = +146.5746 \text{ m}, \quad T_z = +76.2865 \text{ m}, \\ m &= 1 + 0.8407728 \cdot 10^{-6} \\ \varepsilon_x &= -1.7388854 \cdot 10^{-6} \text{ [rad]} = -0.35867 \text{ ''} \\ \varepsilon_y &= -0.2561460 \cdot 10^{-6} \text{ [rad]} = -0.05283 \text{ ''} \\ \varepsilon_z &= +4.0896031 \cdot 10^{-6} \text{ [rad]} = +0.84354 \text{ ''} \end{aligned} \quad (28)$$

Bez określonych uproszczeń (27) elementy ortogonalnej macierzy \mathbf{C} są następujące (według Wytycznych Technicznych G-1.10 [10]):

$$\begin{aligned} c_{11} &= 1 + 0.84076440\text{E}-6 & c_{12} &= +4.08960694\text{E}-6 & c_{13} &= +0.25613907\text{E}-6 \\ c_{21} &= -4.08960650\text{E}-6 & c_{22} &= 1 + 0.84076292\text{E}-6 & c_{23} &= -1.73888787\text{E}-6 \\ c_{31} &= -0.25614618\text{E}-6 & c_{32} &= +1.73888682\text{E}-6 & c_{33} &= 1 + 0.84077125\text{E}-6 \end{aligned} \quad (29)$$

Interesującym spostrzeżeniem może być to, że przy przejściu z elipsoidy GRS-80 (WGS-84) na elipsoidę Krasowskiego (jako elipsoidę lokalną) następuje dodatnia zmiana skali wynosząca ok. 0.84 mm/km. Można powiedzieć, że jest to obecnie identyfikowane odchylenie pomiędzy współczesnym „metrem satelitarnym”, a „metrem klasycznym”, wynikającym w istocie z realizacji skali osnów podstawowych. Wielkość ta, jako praktycznie bardzo mała, świadczy raczej o wysokiej precyzji pomiarów klasycznych, gdzie jak wiadomo, skala sieci była określana przez bardzo precyzyjne pomiary liniowe baz triangulacyjnych. Przy tej okoliczności oddajmy więc należny hołd i słowa uznania dawnym pokoleniom geodetów za dobrze wykonaną robotę.

13. 2. Transformacja odwrotna: $[X,Y,Z]_K \Rightarrow [X,Y,Z]_G$

Odwrócenie zależności (25) prowadzi do formuł ogólnych:

$$\begin{aligned} X_G &= d_{11} \cdot (X_K - T_x) + d_{12} \cdot (Y_K - T_y) + d_{13} \cdot (Z_K - T_z) \\ Y_G &= d_{21} \cdot (X_K - T_x) + d_{22} \cdot (Y_K - T_y) + d_{23} \cdot (Z_K - T_z) \\ Z_G &= d_{31} \cdot (X_K - T_x) + d_{32} \cdot (Y_K - T_y) + d_{33} \cdot (Z_K - T_z) \end{aligned} \quad (30)$$

gdzie współczynniki d są elementami macierzy D , która jest po prostu macierzą odwrotną do C . Elementy te wyznaczamy natychmiast kierując się własnością (26). Otrzymują one następujące wartości:

$$\begin{aligned} d_{11} &= 1 - 0.84078048E-6 & d_{12} &= -4.08959962E-6 & d_{13} &= -0.25614575E-6 \\ d_{21} &= +4.08960007E-6 & d_{22} &= 1 - 0.84078196E-6 & d_{23} &= +1.73888389E-6 \\ d_{31} &= +0.25613864E-6 & d_{32} &= -1.73888494E-6 & d_{33} &= 1 - 0.84077363E-6 \end{aligned} \quad (31)$$

Stosując własność (26) możemy również odwrócić formułę (25) przy założeniu uproszczeń zawartych w związkach (27) i parametrach (28). Analiza dokładności numerycznej potwierdza, że uproszczenia w tej postaci są w pełni wystarczające dla całego obszaru Polski („resztowa” nieortogonalność nie jest praktycznie istotna).

Przykłady:

Bierzemy 5 punktów (rys. 3) i zadajemy ich współrzędne B, L, H w układzie GRS-80 (WGS-84). Zgodnie z przyjętymi zasadami dokonujemy przekształceń:

$$[B, L, H]_G \xrightarrow{1} [X, Y, Z]_G \xrightarrow{2} [X, Y, Z]_K \xrightarrow{3} [B, L, H]_K \quad (32)$$

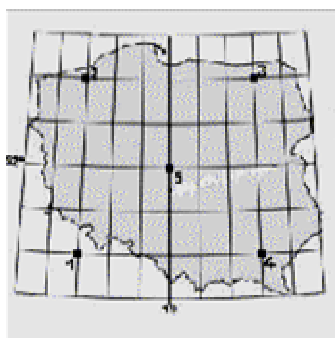
Wyniki prezentuje tabela 7.

Tabela 7

nr	Elipsoida GRS-80 (WGS-84)			Elipsoida Krasowskiego		
	B ° ' "	L ° ' "	H [m]	B ° ' "	L ° ' "	H [m]
1	50 00 00.000000	16 00 00.000000	300.0000	50 00 01.343186	16 00 06.268112	259.5263
2	54 00 00.000000	16 00 00.000000	100.0000	54 00 01.198027	16 00 06.905876	62.1651
3	54 00 00.000000	22 00 00.000000	100.0000	54 00 00.825868	22 00 06.822831	71.3649
4	50 00 00.000000	22 00 00.000000	200.0000	50 00 00.992567	22 00 06.191810	169.5867
5	52 00 00.000000	19 00 00.000000	200.0000	52 00 01.089875	19 00 06.538289	165.7162
	⇓			⇑		
	X	Y	Z	X	Y	Z
1	3948917.76917	1132333.94905	4863018.85093	3948893.53599	1132456.86991	4863100.18362
2	3611723.43602	1035645.02992	5136824.73301	3611698.59405	1035768.77236	5136906.21414
3	3483683.65367	1407499.55860	5136824.73301	3483660.22479	1407624.13732	5136906.89355
4	3808864.45862	1538881.13193	4862942.24648	3808841.77029	1539004.96750	4863024.32192
5	3720694.63940	1281137.90496	5002960.94752	3720670.85873	1281261.64093	5003042.71508

Uwaga: zwiększona dokładność numeryczna współrzędnych nie ma oczywiście uzasadnienia praktycznego – służy jedynie jako test kontrolny poprawności algorytmów.

Powyższy przykład ilustruje geometrię wzajemnego układu elipsoid w obszarze Polski: Różnice pomiędzy wysokościami elipsoidalnymi $H_G - H_K$ są lokalnymi odstępami elipsoid. Jak widać, w „środkowym” punkcie obszaru Polski odstęp ten wynosi ok. 34.3 m. Zauważamy ponadto, że współrzędne geodezyjne B, L na elipsoidzie Krasowskiego są większe o średnio ok. 1" w szerokości B i ok. 6.5" w długości L . Dokładność zapisu współrzędnych geodezyjnych B, L zależy od wymaganej dokładności zapisu odpowiadających współrzędnych płaskich (w odwzorowaniu): Dokładność do 0.0001" gwarantuje, że odpowiadający błąd zaokrąglenia współrzędnych płaskich nie przekracza 0.003 m (zmiana szerokości geodezyjnej B o 1" odpowiada przyrostowi łuku południka o ok. 30 m, zaś zmiana długości L o 1" daje przyrost długości łuku równoleżnika ok. 20m).

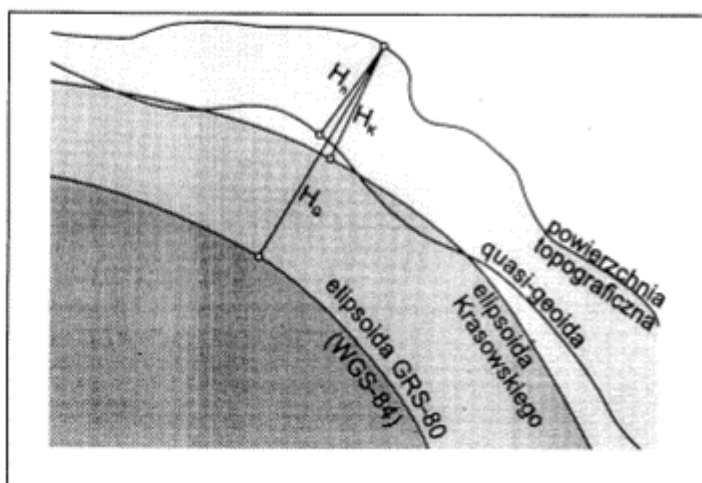


Rys. 20. Szkic punktów testowych.

14. Określanie przybliżonych wysokości elipsoidalnych dla zadań transformacji dwuwymiarowej

Aby przeliczyć współrzędne płaskie układu odwzorowawczego jednej elipsoidy na współrzędne płaskie układu odwzorowawczego drugiej elipsoidy powinniśmy przejść ścieżką poprzez współrzędne elipsoidalne, zgodnie z poznanymi już formułami zilustrowanymi rys. 7. Do tego celu trzeba przyjąć przybliżone wysokości elipsoidalne punktów w systemie z którego wychodzimy. Przypuśćmy, że przeliczamy współrzędne z układu „1992” do układu „1965”. „Po drodze” realizujemy przeliczenie według schematu (32). Zatem powinniśmy dysponować informacjami o wysokościach elipsoidalnych GRS-80 (oznaczonych przez H_G). Przy przeliczaniu odwrotnym będzie natomiast obowiązywać schemat odwrotny do (32) i wtedy należy przyjąć wysokości elipsoidalne Krasowskiego (oznaczone H_K). Ponieważ jednak (jak pamiętamy z pierwszego wykładu) przy przeliczaniu współrzędnych płaskich wymienione wysokości mają tylko niewielki wpływ na zmiany współrzędnych płaskich, wystarczy posłużyć się wartościami orientacyjnymi tych wysokości (zaokrąglonymi do metrów, a nawet do dziesiątek metrów). W tym celu możemy wykorzystać stosowane w praktyce wysokości normalne H_n (np. pozyskane z interpolacji na mapie). Wykorzystując fakt, że elipsoida Krasowskiego generalizuje w pewnym sensie przebieg quasi-geoidy (maksymalne odchylenia w obszarze Polski są rzędu kilku metrów) zaś przeciętny odstęp elipsoid (jak wynika reprezentatywnie z tabeli 7) wynosi ok. 34 m, z wystarczającą dla naszego celu dokładnością możemy przyjąć (rys. 21):

$$H_K \approx H_n \text{ oraz } H_G \approx H_n + 34 \quad (33)$$



Rys. 21. Wysokości elipsoidalne i normalne.

Warto w tym miejscu dodać, że współcześnie wyznaczane – przy wykorzystaniu techniki GPS – punkty osnów geodezyjnych, w wyniku bezpośredniego wyrównania sieci wektorów w układzie elipsoidy GRS-80 (WGS-84) posiadają określone wysokości elipsoidalne H_G . Mogą być one przeliczone na wysokości niwelacyjne przy wykorzystaniu numerycznego modelu geoidy (quasi-geoidy) lub poprzez lokalną interpolację odstępów geoidy od elipsoidy w oparciu o punkty dostosowania wyznaczone drogą niwelacji geometrycznej.

15. Problematyka korekt post-transformacyjnych związanych z empirycznym układem odniesienia

15.1. Wprowadzenie

W poprzednich rozdziałach zajmowaliśmy się formułami transformacyjnymi współrzędnych, na bazie teoretycznych modeli dotyczących elipsoid odniesienia i ich matematycznych odwzorowań. Nasze rozważania dotyczyły więc pewnych sytuacji „idealnych”, jakie leżą u podstaw projektowania układów współrzędnych. Z drugiej strony, każdy definiowany w geodezji układ współrzędnych ma sens praktyczny tylko wtedy, gdy istnieje jego fizycznie powiązanie z obiektem pomiaru (powierzchnią Ziemi) poprzez punkty osnów geodezyjnych (których współrzędne w danym układzie wyznaczono na drodze procesu pomiarowo-obliczeniowego). Pomiędzy teorią układu a jego rzeczywistością (empiryczną) realizacją, która dokonuje się w środowisku błędów pomiarowych, będzie zachodzić zatem mniej lub bardziej istotna rozbieżność. Konieczność jednoznacznych rozstrzygnięć wymusza stosowanie dodatkowych operacji korygujących owe rozbieżności. Problem będzie mieć niebawem coraz większe znaczenie praktyczne, zwłaszcza w aspekcie przetwarzania archiwalnych zasobów kartograficznych z układu „1965” do nowego układu „2000”.

15.2. Matematyka a rzeczywistość.

Dla ilustracji problemu rozważmy następujące zadanie: Mamy dane współrzędne x, y pewnego punktu osnowy poziomej I klasy w układzie „1992”, pozyskane z nowego wyrównania sieci na elipsoidzie GRS-80. Stosując poznane formuły matematyczne przekształcamy je na przykład do strefy 1 układu „1965” (pamiętamy, że na drodze przekształcenia uwzględniamy przybliżoną informację o wysokości elipsoidalnej punktu):

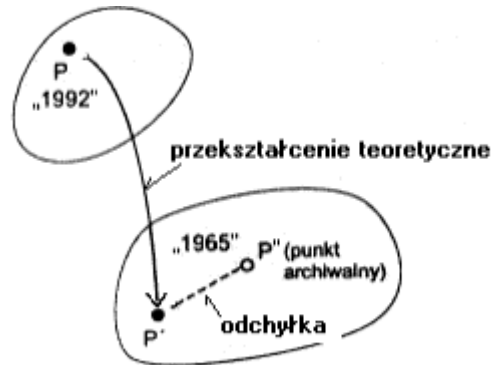
$$(x, y)_{1992} \xRightarrow{[a]} (B, L)_{GRS-80} \xRightarrow{[b]} (X, Y, Z)_{GRS-80} \xRightarrow{[c]} (X, Y, Z)_{Kras.} \xRightarrow{[d]} (B, L, H)_{Kras.} \xRightarrow{[e]} (x, y)_{1965/1} \quad (34)$$

(symbole [a] .. [e] oznaczają kolejne operacje elementarne w przekształceniu współrzędnych).

Tymczasem dla tego samego punktu w układzie **1965/1** istnieją już współrzędne archiwalne, pochodzące z dawnych wyrównań sieci na elipsoidzie Krasowskiego; oznaczmy je $(\sim x, \sim y)_{1965/1}$ – rys. 22. Na podstawie takiego lub podobnych testów przeprowadzonych w różnych strefach układu „1965” możemy doświadczyć, że wyniki przekształceń matematycznych w sensie (1) nie pokryją się na ogół z wartościami odpowiadających współrzędnych archiwalnych, a różnice (maksymalne w strefie 3 dochodzą nawet do 1 m) mają wyraźne cechy lokalnych lub globalnych (strefowych) odchyłań systematycznych. Biorąc pod uwagę, że nowo-pozyskane współrzędne punktów I klasy w układzie **1992** charakteryzują się względnie wysoką dokładnością (w świetle przeprowadzonej analizy, przeciętny błąd położenia punktu względem nawiązawczej sieci **POLREF** i **EUREF-POL** nie przekracza wartości 0.02 m pomimo, że do nowego wyrównania użyto zbiorów obserwacji archiwalnych) można wnioskować, że różnice pomiędzy współrzędnymi obliczonymi a archiwalnymi są głównie wynikiem dawnych opracowań numerycznych sieci, najpierw na elipsoidzie Krasowskiego, a następnie w poszczególnych strefach układu **1965** (należy mieć przy tym na uwadze nieporównywalne w różnych epokach możliwości techniki obliczeniowej). Przyjmijmy umownie, że współrzędne przeliczone generują **matematyczny układ „1965”**, zaś współrzędne archiwalne – odpowiadający **układ empiryczny „1965”**. Zakładamy, że układ empiryczny, wraz z całym archiwum map, poza doraźną aktualizacją (do roku 2009 - w świetle cytowanego Rozporządzenia Rady Ministrów), nie powinien podlegać już zasadniczym modernizacjom. Dlatego wszelkie przeliczenia punktów z nowych układów odwzorowawczych elipsoidy **GRS-80** (z systemu **ETRF'89**) do układu **1965** powinny zakładać „dopasowanie” współrzędnych obliczonych do istniejących już odpowiedników empirycznych (archiwalnych). Oznacza to konieczność zastosowania dodatkowego przekształcenia współrzędnych:

$$(x, y)_{1965} \xRightarrow{[układ\ matematyczny]} (\sim x, \sim y)_{1965} \quad (35)$$

[układ empiryczny (archiwalny)]



Rys.22. Współrzędne matematyczne a współrzędne empiryczne (archiwalne).

ETRF'89) do układu „1965” powinny zakładać „dopasowanie” współrzędnych obliczonych do istniejących już odpowiedników empirycznych (archiwalnych). Oznacza to konieczność zastosowania dodatkowego przekształcenia współrzędnych:

$$\begin{array}{ccc} (x, y)_{1965} => (\tilde{x}, \tilde{y})_{1965} & & (36) \\ \text{[układ matematyczny]} & & \text{[układ empiryczny (archiwalny)]} \end{array}$$

Istnieją różne „szkoły” wykonania tego zadania. Omówimy je pokrótce. Tymczasem zauważmy, że analogiczny problem wystąpi również przy przeliczaniu odwrotnym do (35), czyli z układu 1965 do układu 1992 lub 2000 i to - jak się wydaje - będzie stanowić istotne zadanie technologiczne w najbliższych latach. O ile operacja (35) oznacza pewne „świadome” zniekształcanie układu „dobrego”, operacja odwrotna będzie oznaczać „naprawianie” (korygowanie) zniekształconego układu archiwalnego (po to, by wejść do układu nowego z możliwie lepszym efektem jakościowym).

W przykładowym przekształceniu (35), które według przyjętej umowy generuje układ matematyczny 1965, występuje operacja [c], której geneza nie jest jednak „czysto” matematyczna. Jak już wspomniano we wcześniejszych wykładach, parametry owej transformacji [c] estymowano w oparciu o punkty sieci POLREF (dysponowano współrzędnymi punktów tej sieci w obu układach elipsoidalnych). Warto w tym miejscu nadmienić, że uzyskane w tej estymacji odchyłki współrzędnych miały wartość przeciętną ok. 0.20 m (maksymalnie na jednym punkcie POLREF zanotowano ok. 0.60 m). Pomimo takiego efektu stochastycznego przyjmujemy, że ostateczna formuła transformacyjna, definiująca niejako na nowo położenie elipsoidy Krasowskiego (obecnie względem elipsoidy GRS-80) ma charakter matematycznego (stałego) założenia. W związku z tym całkowita odchyłka pomiędzy matematycznym, a empirycznym układem 1965, której przyczyn nie analizujemy, kumuluje się na końcowym etapie przekształcenia współrzędnych i jako taka tylko jest przedmiotem oceny lub podejmowania decyzji w aspekcie skutków.

15. 3. Wpasowanie w układ empiryczny

Jeśli różnice pomiędzy współrzędnymi obliczonymi (matematycznymi) a empirycznymi (archiwalnymi) na punktach łącznych nie przekraczają poziomu dopuszczalnego błędu współrzędnych to mamy do czynienia z przypadkiem, kiedy korekta typu (36) nie jest konieczna. W typowych sytuacjach praktycznych takie „zdarzenie dokładnościowe” będzie raczej wyjątkiem. W ogólności zajdzie potrzeba jakiejś konkretnej realizacji formuły korekcyjnej (korekty) typu (36). Wyróżnimy w związku z tym następujące rodzaje korekt:

- korekty globalne (dla całej strefy) o charakterze przekształcenia wiernokątnego,
- korekty globalne o charakterze afinicznym,
- korekty lokalne (ograniczone do obszaru opracowania, fragmentu strefy) oparte na danym lokalnym zbiorze punktów dostosowania (punktów łącznych), realizowane przy zastosowaniu transformacji Helmerta oraz dodatkowej korekty (korekty post-transformacyjnej) Hausbrandta [3], mającej na celu „wyzerowanie” odchyłek na punktach łącznych i odpowiednio skorygowanie z tego tytułu wszystkich pozostałych punktów transformowanych.

Korekty globalne różnią się zasadniczo od korekt lokalnych tym, że nie wymagają odszukiwania, identyfikowania i kontroli poprawności lokalnego układu punktów łącznych. Funkcje realizujące korekty globalne można wyznaczyć jednokrotnie dla

każdej strefy układu **1965** (w oparciu o dostępne w różnych układach współrzędne punktów I klasy) i „wstawić” je na stałe do programu transformującego w formie odpowiedniej procedury. Rozwiązanie takie zastosowano w pakiecie programów GEONET_unitrans [15], gdzie mamy możliwość wyboru następujących opcji transformacji na wejściu do - lub wyjściu z - układu **1965**:

- opcji matematycznej,
- opcji matematycznej - skorygowanej (z globalną korektą konforemna),
- opcji empirycznej (z globalną korektą afiniczną).

Opcja korekt lokalnych, wymagająca dodatkowych informacji zewnętrznych (wykazu współrzędnych punktów łącznych) realizuje się natomiast za pomocą dodatkowego programu transformacji płaskiej.

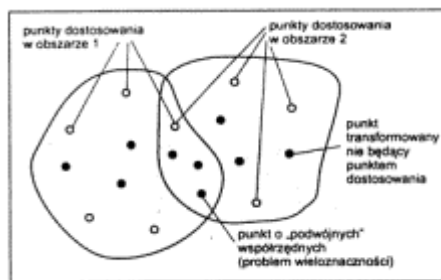
Globalna korekta konforemna dla stref układu **1965** jest reprezentowana przez wielomian zmiennej zespolonej (stopnia 1 dla strefy 5 lub stopnia 5 dla wszystkich pozostałych stref układu **1965**). Opiera się ona na założeniu, że przekształcenie pomiędzy układem empirycznym a matematycznym (lub odwrotnie) zachowuje cechę wierności. Lokalnie korekta ta nie zmienia kształtu transformowanej sieci, co ma znaczenie np. przy opracowywaniu sieci GPS. Na podstawie testów przeprowadzonych w poszczególnych strefach układu **1965** można stwierdzić, że globalne korekty konforemne powodują zmniejszenie odchyłek (względem układu empirycznego) przeciętnie o ok. 70% (por. tab. 9). Korekta może być stosowana dwukierunkowo, tzn. także przy przekształceniach odwrotnych (z układu **1965** do układu **1992** lub **2000**).

Globalna korekta afiniczna, realizowana za pomocą wielomianów stopnia 5-6, sprowadza układ matematyczny do postaci odchylającej się od układu empirycznego przeciętnie już tylko o rząd kilku centymetrów (od 0.02 do 0.05 m). Globalna korekta afiniczna może mieć zastosowanie zwłaszcza przy przekształcaniu wektorowych obrazów map. Ograniczeniem stosowalności globalnych korekt afinicznych jest granica danej strefy. Korekta może być stosowana dwukierunkowo (do -i z układu **1965**).

Korekta lokalna realizuje się dwuetapowo: najpierw za pomocą znanej transformacji Helmerta (liniowej transformacji konforemnej) w oparciu o zidentyfikowane punkty dostosowania klasy wyższej niż klasa punktów transformowanych, a następnie poprzez tzw. korektę Hausbrandta [3], mającą na celu „redystrybucję” powstałych odchyłek na wszystkie punkty transformowane (w szczególności punkty dostosowania zachowują dokładnie współrzędne archiwalne). Korekta tego rodzaju jest proponowana m.in. w projektach nowych przepisów technicznych (Instrukcja G-2 [11] oraz Wytyczne Techniczne G-1.10 [10]). Pomimo bardzo klarownego geometrycznego podejścia, korekta lokalna - oprócz wspomnianych już wymagań dodatkowych w zakresie punktów łącznych - ma pewne wady technologiczne, które mogą niekiedy prowadzić do pogorszenia rezultatów. Dotyczy to kwestii niejednoznaczności „na styku” dwóch niezależnie opracowywanych obiektów oraz problemu możliwej nieaktualności danych, w oparciu o które wyznacza się lokalne parametry transformacji.

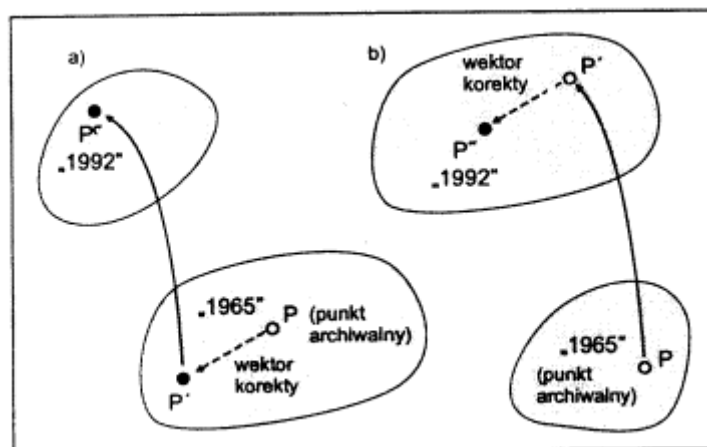
- Niejednoznaczność wynika wprost z pewnej dowolności lokalnego układu punktów dostosowania (punktów łącznych transformacji). Jeśli dwa niezależnie opracowywane obiekty (sieci) sąsiadują ze sobą i korzystają z różnych (ale niekoniecznie rozłącznych) zbiorów punktów dostosowania wówczas powstaje problem uzgodnienia współrzędnych punktów położonych na granicy dwóch obszarów („uzgodnienie styków”) - rys. 23. Opisany efekt nie musi być wynikiem jakiegoś błędnego punktu dostosowania. Jest to efekt geometryczny, który można zobrazować na przykład zastąpieniem powierzchni regularnej wycinkami płaszczyzn. W przeciwieństwie do omawianych korekt lokalnych korekty globalne prowadzą do wyników jednoznacznych, pod warunkiem, że są konstruowane jako funkcje ciągłe dla całej strefy odwzorowawczej. Nie analizujemy już szerzej możliwych efektów „większego kalibru”, kiedy przy niekorzystnym układzie lub niewielkiej liczbie punktów dostosowania „zdarzą się” współrzędne z istotnym błędem. Jeśli weźmiemy pod uwagę bliskie już potrzeby przetwarzania dotychczasowego zasobu numeryczno-kartograficznego z układu **1965** do układu **2000**, to względy ekonomiczne (masowość przetwarzania) i niezawodnościowe (do czego nawiązano powyżej) oraz kwestie inne tu wymieniane uzasadniają przyjęcie automatycznych korekt globalnych, jako „generalnie” zweryfikowanego elementu przetwarzania. Dodajmy, że element ten jako część programu jest dla użytkownika „niewidzialny”.

- Problem nieaktualności danych może zaistnieć w sytuacji, gdy współrzędne archiwalne dotyczą innych położenia znaków fizycznych niż ich stan obecny, tj. na moment wykonywania nowych pomiarów. Łatwo zauważyć, że korekta lokalna spowoduje przemieszczenie układu punktów transformowanych, a tym samym całą „treść” nowego pomiaru względem archiwalnego obrazu mapy. Tej wady nie mają korekty globalne (współczynniki korekt globalnych wyznacza się wprawdzie w oparciu o nowo-wyrównane współrzędne punktów I klasy na elipsoidzie GRS-80 ale to wyrównanie zrealizowano jak wiadomo w oparciu o te same zbiory obserwacyjne, z których pozyskiwano współrzędne w układzie **1965**).



Rys. 23. Ilustracja do problemu niejednoznaczności korekt lokalnych

Pewną osobliwą różnicą pomiędzy korektami globalnymi i lokalnymi jest to, że korekty globalne można realizować dwukierunkowo pomiędzy matematycznym układem 1965 a jego odpowiednikiem empirycznym: $(x, y)_{1965} \Leftrightarrow (\sim x, \sim y)_{1965}$, czyli także jako odwrócenie ogólnego przekształcenia (36). Odwrotna korekta lokalna wymaga natomiast, by najpierw przekształcić „błędne” współrzędne do układu nowego, a dopiero na płaszczyźnie tego układu dokonać stosownych dopasowań transformacyjnych w oparciu o punkty dostosowania (rys. 24). Oczywiście, takie postępowanie nie jest wadą korekt lokalnych, zmienia tylko w pewnym sensie kolejność operacji elementarnych.



Rys. 24. Schemat korekt odwrotnych: a) globalna , b) lokalna

15. 4. Technika korekt konforemnych

W przypadku korekt konforemnych przekształcenie z układu matematycznego do układu empirycznego (lub odwrotnie) dokonuje się przy wykorzystaniu ogólnych wielomianów zespolonych:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_0 + \sum_{i=0..n} \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}^i \quad (37)$$

gdzie:

argument zespolony \mathbf{u} jest utworzony ze współrzędnych pierwotnych (w zależności od kierunku korekty będą to współrzędne matematyczne lub empiryczne):

$$\mathbf{u} = (u_x, u_y); \quad u_x = (x - x_0) \cdot s, \quad u_y = (y - y_0) \cdot s,$$

x, y – współrzędne pierwotne, x_0, y_0 – parametry centrujące,
 s – parametr skalujący (normujący) dobrany tak, by w całym obszarze strefy był spełniony warunek: $|\mathbf{u}| < 1$,
 $\mathbf{c}_i = (a_i, b_i)$ – zespolone współczynniki wielomianu wyznaczone jednokrotnie dla całej strefy (wprowadzone na stałe do programu komputerowego),
 $\mathbf{Z} = (X, Y)$ – współrzędne wynikowe (skorygowane, w układzie wtórnym),
 $\mathbf{Z}_0 = (X_0, Y_0)$ – pomocnicze współrzędne centrujące w układzie wtórnym.

W tabeli 8 podano przykładowe parametry dla strefy 4 układu 1965. Ze względu na ograniczone ramy wykładu, nie rozwijamy już tematyki korekt quasi-afinicznych, które opierają się na ogólnych formułach wielomianowych. Komplet parametrów i funkcji korekcyjnych, zarówno konforemnych jak i ogólnowielomianowych, dla wszystkich stref układu 1965 jest zaaplikowany w pakiecie **GEONET_unitrans** [15].

Tabela 8

PRZYKŁADOWE PARAMETRY KONFOREMNEJ FUNKCJI KOREKCYJNEJ DLA STREFY 4 UKŁADU 1965				
PRZEKSZTALCENIE				
Oznaczenie parametru	(x,y) (mat.)	=> (~x,~y) (empir.)	(~x,~y) => (x,y) (empir.)	(mat.)
x_0	5627000.0		5627000.0	
y_0	3703000.0		3703000.0	
X_0	5627000.0		5627000.0	
Y_0	3703000.0		3703000.0	
s	0.4e-5		0.4e-5	
n	6		6	
a_0	0.09729		-0.09729	
b_0	-0.09348		0.09348	
a_1	249999.52339		250000.47661	
b_1	-0.04197		0.04197	
a_2	-0.04379		0.04379	
b_2	0.17728		-0.17728	
a_3	0.12396		-0.12396	
b_3	0.08398		-0.08398	
a_4	-0.01043		0.01043	
b_4	-0.18039		0.18040	
a_5	0.15683		-0.15683	
b_5	-0.00164		0.00164	
a_6	-0.01200		0.01200	
b_6	0.08029		-0.08029	

FRAGMENT PROGRAMU (w j. DELPHI) OBLICZANIA WIELOMIANU ZESPOLONEGO TYPU (3) JAKO FUNKCJI KOREKCYJNEJ	
<p>{ Oznaczenia pomocnicze: x,y - współrzędne dane; XX, YY - współrzędne wynikowe; ux, uy - argumenty rzeczywiste, xo,yo - parametry centrujące w układzie pierwotnym; XXo, YYo - parametry centrujące w układzie wtórnym; a, b - tablice współczynników; s - parametr normujący; p, q - zmienne pomocnicze (wszystkie wielkości typu <i>real</i>), n - stopień wielomianu typu <i>integer</i> }</p> <pre> ux:=(x-xo)*s; uy:=(y-yo)*s; XX:=XXo+a(0); YY:=YYo+b(0); p:=1; q:=0; for j:=1 to n do begin rx:=p*ux-q*uy; ry:=q*ux+p*uy; p:=rx; q:=ry; XX:=XX+p*a(j)-q*b(j); YY:=YY+q*a(j)+p*b(j); end;</pre>	

15.4. Statystyka odchyłeń pomiędzy matematycznym a empirycznym (rzeczywistym) układem „1965”

Tabela 9 podaje przeciętne (co do wartości bezwzględnej) i maksymalne odchylenia współrzędnych matematycznych (bez korekty i z korektami globalnymi) od współrzędnych archiwalnych, zidentyfikowane na punktach I klasy. Ze szczegółowej analizy różnic współrzędnych można wynieść, że istotne odchylenia „od matematyki” widoczne są zwłaszcza w strefie 3 układu 1965, gdzie historycznie rzecz biorąc osnowa geodezyjna nie stanowiła jednolitego i jednorodnego układu obserwacyjnego. Drugie nie mniej istotne spostrzeżenie dotyczy strefy 5, gdzie zaznacza się widoczne przesunięcie układu empirycznego po osi X w granicach ok. 0.5 m.

Tabela 9: Statystyka odchyłek rzeczywistego układu 1965

Wartości odchyłek współrzędnych pomiędzy układem matematycznym a układem rzeczywistym „1965” oraz efekty zastosowania korekt konformnych i afinicznych									
PRZECIĘTNE [m]							MAKSYMALNE - WYPADKOWE [m]		
Strefa	bez korekty		z korekta konforemna		z korekta afiniczna		bez korekty [m]	z korekta konforemna [m]	z korekta afiniczna [m]
	e_x [m]	e_y [m]	e_x [m]	e_y [m]	e_x [m]	e_y [m]			
1	0.15	0.17	0.09	0.12	0.05	0.05	0.6	0.4	0.3
2	0.19	0.10	0.04	0.05	0.03	0.04	0.6	0.2	0.2
3	0.20	0.18	0.04	0.04	0.04	0.03	1.0	0.3	0.2
4	0.10	0.12	0.03	0.05	0.03	0.03	0.5	0.2	0.2
5	0.45	0.07	0.05	0.04	0.04	0.02	0.8	0.5	0.5

Korekta konforemna (globalna dla całej strefy układu 1965) ma znaczenie porównawcze, świadczące o istnieniu pewnych systematycznych deformacji strefowych rzeczywistego układu 1965. Ten rodzaj korekty proponuje się jednak tylko przy przejściu z układu 1992 lub 2000 do układu 1965, co pozwala zachować lokalne podobieństwo figur określonych np. precyzyjnymi pomiarami GPS. Jeśli w grę wchodzi pozostawienie dla pewnych punktów (punktów osnowy wyższego rzędu) niezmiennych współrzędnych archiwalnych w układzie 1965, to zamiast globalnej korekty konforemnej stosuje się zwykle lokalną transformację *Helmerta* uzupełnioną o tzw. korektę **Hausbrandta**, która realizuje dodatkowe wyrównanie odchyłek otrzymanych na punktach dostosowania (w rezultacie tego, punkty dostosowania nie zmieniają swoich współrzędnych w układzie 1965). Jakkolwiek takie postępowanie jest zapisane w nowej Instrukcji G-2 (nawiasem mówiąc – instrukcji już wydanej, ale jeszcze nie zatwierdzonej do stosowania) rodzi wiele problemów:

- Po pierwsze, punkty identyfikowane w nowym pomiarze mogły ulec przemieszczeniom w stosunku do pozycji określonych przez współrzędne archiwalne (jest to przypadek typowy dla obszarów GOP). W takiej sytuacji lepiej nadać im nowe współrzędne, wynikające np. z globalnej korekty konforemnej (bo współrzędne archiwalne odpowiadają nieistniejącym już pozycjom znaków geodezyjnych).
- Po wtóre, przy stosowaniu korekt lokalnych pojawiają się „problemy” na stykach sąsiednich sieci opracowywanych przez różnych wykonawców, przy różnych zbiorach punktów dostosowania. Tutaj również, zastosowanie jednolitej korekty globalnej (dla całej strefy) pozwala na uzyskanie wyników jednoznacznych.
- Po trzecie wreszcie, wspomniana korekta lokalna może nie być możliwa do zastosowania (ze względu na brak punktów dostosowania) na granicy dwóch stref.

Przy wszelkich przekształceniach obrazów kartograficznych (wektorowych, rastrowych) z układu 1965 do układu 2000 lub 1992 (w tym przy automatycznej konwersji plików map cyfrowych lub w celu transformacji siatek kalibracyjnych lub naroży arkuszy map) powinniśmy stosować jednak **globalną korektę afiniczną** (ogólno-wielomianową), która – jak wynika z tabeli 9- eliminuje istotnie błąd układu rzeczywistego, sprowadzając ją do poziomu błędów pomiarowych.

15. 5. Transformacja Helmetra (przez podobieństwo lub liniowa transformacja konforemna) jako narzędzie korekty lokalnej.

W pierwszym etapie wyznaczamy współczynniki transformacji w oparciu o współrzędne punktów dostosowania (łącznych). Oznaczmy $\{(x_i, y_i): i = 1, 2, \dots, n\}$, $\{(X_i, Y_i): i = 1, 2, \dots, n\}$ dane zbiory współrzędnych tych punktów w odpowiednich układach: pierwotnym i aktualnym. Obliczamy najpierw współrzędne środków ciężkości zbiorów punktów w obu układach i dokonujemy odpowiedniego centrowania współrzędnych:

$$\begin{aligned} x_o &= (\sum x_i)/n, & y_o &= (\sum y_i)/n, & X_o &= (\sum X_i)/n, & Y_o &= (\sum Y_i)/n \\ \underline{x}_i &= x_i - x_o, & \underline{y}_i &= y_i - y_o, & \underline{X}_i &= X_i - X_o, & \underline{Y}_i &= Y_i - Y_o \\ & \text{(dla wszystkich } i = 1, 2, \dots, n \text{).} \end{aligned} \quad (38)$$

Szukane współczynniki transformacji wyrażają się wzorami:

$$C = W_1 / W, \quad S = W_2 / W, \quad (39)$$

gdzie:

$$W = \sum_{i=1 \dots n} (\underline{x}_i^2 + \underline{y}_i^2),$$

$$W_1 = \sum_{i=1 \dots n} (\underline{X}_i \cdot \underline{x}_i + \underline{Y}_i \cdot \underline{y}_i), \quad (40)$$

$$W_2 = \sum_{i=1 \dots n} (\underline{X}_i \cdot \underline{y}_i - \underline{Y}_i \cdot \underline{x}_i). \quad (41)$$

Teraz możemy już realizować samą transformację (przekształcenie współrzędnych z układu pierwotnego do wtórnego) stosując wzory:

$$\begin{aligned} X' &= X_o + C \cdot \underline{x} + S \cdot \underline{y} \\ Y' &= Y_o + C \cdot \underline{y} - S \cdot \underline{x} \end{aligned} \quad (42)$$

gdzie:

$$\underline{x} = x - x_o, \quad \underline{y} = y - y_o$$

x, y – współrzędne punktu w układzie pierwotnym, X', Y' – współrzędne punktu po transformacji (w układzie wtórnym). Dla wszystkich punktów dostosowania obliczamy stosowne odchyłki współrzędnych katalogowych (poprawki do współrzędnych z transformacji):

$$V_{xi} = X_i - X_i', \quad V_{yi} = Y_i - Y_i' \quad (43)$$

(i - wskaźnik punktu dostosowania), a w oparciu o nie – błąd transformacji jako średniokwadratową odchyłkę wypadkową punktu

$$\mu_t = [\sum (V_{xi}^2 + V_{yi}^2) / f]^{1/2} \quad (44)$$

przy czym przyjmujemy $f = n$ (zamiast $f = n - 2$) uznając, że parametr μ_t jest tylko umowną miarą jakości dopasowania (w ujęciu stochastycznym parametr ten byłby wprowadzie pewnym oszacowaniem błędu położenia punktu, ale ocena taka nie jest dostatecznie wiarygodna, gdyż opisane zadanie zakłada uproszczony model stochastyczny dla wielkości, które nie są bezpośrednimi obserwacjami, a ponadto nadwymiarowość układu będzie w praktyce na ogół istotnie ograniczona). Niezależnie od powyższych wątpliwości, odchyłki i błąd transformacji są podstawą do jakiejś oceny poprawności współrzędnych punktów dostosowania w danej klasie sieci. Współczynniki transformacji C, S mają następującą interpretację:

$$C = m \cdot \cos(\alpha), \quad S = m \cdot \sin(\alpha), \quad (45)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} m &= (C^2 + S^2)^{1/2} - \text{współczynnik zmiany skali przekształcenia} \\ \alpha &- \text{kąt skręcenia osi układu współrzędnych.} \end{aligned} \quad (46)$$

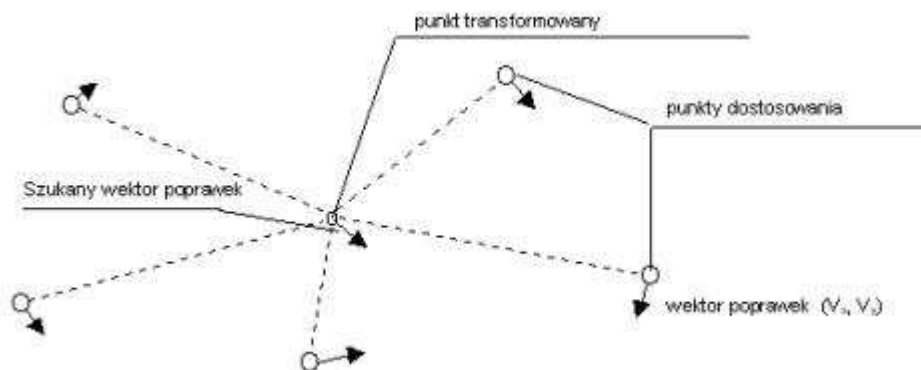
15. 6. Korekta post-transformacyjna Hausbrandta

W wyniku zastosowania wzorów (42) wszystkie punkty dostosowania otrzymają nowe współrzędne, które nie muszą się pokrywać z istniejącymi już współrzędnymi katalogowymi (archiwalnymi) tych punktów. Różnice określone wzorami (43) są odchyłkami transformacji. Aby nie zmieniać dotychczasowych współrzędnych (archiwalnych) stosujemy pewnego rodzaju dodatkowe „uzgodnienie” współrzędnych, które nazywa się korektą *Hausbrandta* [3]. Polega ona na tym, że współrzędne punktów dostosowania w układzie wtórnym pozostawia się bez zmiany (można powiedzieć inaczej, że do współrzędnych transformowanych (42) dodaje się wartości poprawek (43) powracając tym samym do wartości współrzędnych katalogowych), natomiast wszystkim pozostałym punktom transformowanym (poza punktami dostosowania) przydziela się poprawki wyznaczone przy zastosowaniu specjalnych wzorów interpolacyjnych (w ten sposób następuje niejako świadome deformowanie wyników transformacji Helmerta, narzucone przez warunek niezmienności współrzędnych katalogowych):

$$V_{xj} = \frac{\sum [V_{xi} \cdot (1/d_{ij}^2)]}{\sum (1/d_{ij}^2)} , \quad V_{yj} = \frac{\sum [V_{yi} \cdot (1/d_{ij}^2)]}{\sum (1/d_{ij}^2)} \quad (47)$$

(sumowania po $i = 1, 2, \dots, n$; j – wskaźnik punktu transformowanego)

Jak widać z postaci wzorów, mają one podobieństwo do średnich ważonych, gdzie wagi są odwrotnościami kwadratów odległości danego punktu o wskaźniku j (w zbiorze wszystkich punktów transformowanych) od punktu dostosowania o wskaźniku i (w zbiorze punktów dostosowania). Ilustruje to przykładowo rys. 25. Długości d_{ij} obliczamy na podstawie współrzędnych pierwotnych. Wielkości poprawek (47) dodajemy do współrzędnych po transformacji, czyli do współrzędnych wyznaczonych przy pomocy wzorów (42).



Rys. 25. Ilustracja do zadania korekty *Hausbrandta*.

16. PROBLEMATYKA WYZNACZENIA FORMUŁ TRANSFORMACYJNYCH POMIĘDZY UKŁADEM LOKALNYM A UKŁADEM PAŃSTWOWYM

16.1. Wprowadzenie

Układy lokalne zakładano w Polsce, dla większości aglomeracji miejskich, w celach prowadzenia wielkoskalowych map gospodarczych (zasadniczych, ewidencyjnych), równoległe z funkcjonującym układem państwowym (1942, 1965) jako układem podstawowym dla prac kartograficzno-geodezyjnych. Obok kwestii związanych z utajnieniem lokalizacji obiektów, istotnym celem praktycznym w tworzeniu układów lokalnych było wyeliminowanie potrzeby wprowadzania istotnych redukcji odwzorowawczych obserwacji geodezyjnych (np. w układzie 1965 maksymalne zniekształcenia liniowe wynoszą -20 cm/km), a także redukcji długości n.p.m.

Formalną podstawą do tworzenia układów lokalnych na bazie triangulacji lokalnego znaczenia, była Instrukcja Techniczna A VI zalecająca przy tworzeniu układu, stosowanie lokalnego odwzorowania *Gaussa-Krügera* z południkiem osiowym przechodzącym przez środek danego obszaru. W rzeczywistości jednak układy lokalne powstawały także jako adaptacje dawnych układów katastralnych (np. Kraków, Tarnów) lub poprzez proste – liniowe - przekształcenie lokalnych współrzędnych układu 1965 (np. Gdańsk), a także przez założenie lokalnej płaszczyzny odniesienia (Rzeszów). Należy nadmienić, że na wielu obszarach Polski południowo-wschodniej ewidencja gruntów jest prowadzona nadal na bazie archiwalnych map katastralnych w skali 1: 2880. Współczesne wyzwania gospodarcze, technologiczne, akces do UE i związany z tym system IACS, wymuszają już niejako na polskiej geodezji nie tylko pełną informatyzację dotychczasowych zasobów kartograficznych, lecz także ich ujednoczenie i podniesienie standardów jakościowych.

W związku z wprowadzeniem (w roku 2000) dla map wielkoskalowych, nowego państwowego układu 2000, zachodzi potrzeba opracowania dla każdego układu lokalnego jednoznacznych związków transformacyjnych umożliwiających konwersję dotychczasowych zasobów geodezyjno-kartograficznych do układu państwowego. Ponieważ związki pomiędzy układem 1965 a układem 2000 są już „dokładnie” zidentyfikowane i opublikowane, wystarczy w zupełności, by dla każdego układu lokalnego wyznaczyć odpowiednie związki transformacyjne z dotychczasowym układem 1965. Wówczas również, niejako automatycznie, zostaje określony związek układu lokalnego z układem 2000, a w ogólności z dowolnym układem kartograficznym zdefiniowanym w nowym, europejskim systemie odniesień przestrzennych ETRS z układem odniesienia ETRF'89 (takimi układami kartograficznymi są np.: jednostrefowy dla obszaru Polski układ „1992” dla map topograficznych, UTM – międzynarodowy układ kartograficzny powstały z odwzorowań *Gaussa-Krügera* 6-stopniowych pasów południkowych).

16.2. Empiryczne związki transformacyjne pomiędzy układem lokalnym a układem „1965”

Pomimo, że geneza matematyczna układu lokalnego może być poznawalna (np. na podstawie informacji archiwalnych), podstawą do wyznaczenia formuł transformacyjnych

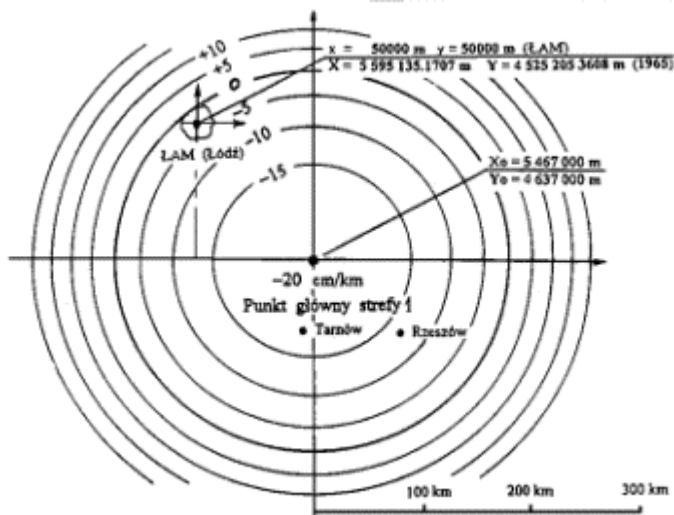
$$(x, y) \text{ lokalne} < == > (x, y) \text{ 1965}$$

powinny być jedynie punkty dostosowania, tj. punkty posiadające współrzędne wyznaczone niezależnie w układzie lokalnym i w układzie 1965 (nie powinny być to punkty wyznaczone z wzajemnych transformacji). Zalecenie powyższe wynika z faktu, że faktycznie zrealizowane układy kartograficzne (lokalny, 1965) nie muszą się pokrywać dokładnie z ich formułami teoretycznymi (układ jest realizowany poprzez osnowy geodezyjne, a te zawierają agregację różnego rodzaju błędów: pomiarowych, obliczeniowych). Ponieważ punkty osnowy geodezyjnych są podstawą lokalizacji obiektów geometrycznych na mapie, zatem mapa przenosi wszystkie cechy jakościowe (dokładnościowe) osnowy geodezyjnej. Tak więc, dążąc do optymalnej transformacji obrazów kartograficznych (wektorowych, rastrowych) opieramy się na zbiorach punktów (zwłaszcza punktach osnowy geodezyjnych), które te obrazy rzeczywiście reprezentują.

Punkty dostosowania powinny być rozmieszczone równomiernie w całym obszarze podlegającym (potencjalnie) transformacji. W szczególności, powinny być rozmieszczone tak, by punkty skrajne (brzegowe) tworzyły figurę wypukłą obejmującą obszar transformowany. Liczebność (gęstość) punktów powinna odpowiadać gęstości punktów osnowy szczegółowej. Przykładowo, dla układów lokalnych miast: Łodzi, Krakowa przyjęto po ok. 600 punktów dostosowania.

W celu określenia formuł transformacyjnych pomiędzy układem lokalnym a układem 1965 (w strefie, w której układ lokalny jest położony) przyjmujemy najpierw ogólny, wielomianowy model matematyczny transformacji, a następnie - w oparciu o dostępne zbiory punktów dostosowania identyfikujemy jego parametry stosując zasadę najmniejszych kwadratów. W tym procesie empirycznym istotną kwestią jest ustalenie optymalnego stopnia wielomianu. W ogólności stopień ten powinien być wyższy od 1, ponieważ wynika to już chociażby ze zmienności liniowego zniekształcenia odwzorowawczego układu 1965

- por. przykładowo rys. 26. Na założenie stałości skali i zastosowanie popularnej transformacji *Helmerta* „możemy pozwolić sobie” tylko dla obszarów małych, o rozpiętości nie przekraczającej 5 km – wtedy popełniany błąd systematyczny mieści się w granicach błędów pomiarowych. Z drugiej strony, identyfikowany stopień wielomianu nie powinien być za wysoki, aby model nie aprosymował już lokalnych błędów pomiarowych osnowy. Wymiernym kryterium wyboru stopnia wielomianu jest średniokwadratowa odchyłka współrzędnej na punktach dostosowania lub odpowiadająca średniokwadratowa odchyłka wektorowa punktu (błąd transformacji). Kontrolując ten parametr wybieramy możliwie najniższy stopień transformacji taki, że jego zwiększenie o 1 nie powoduje już istotnego spadku wartości błędu transformacji. W cytowanych przykładach (Kraków, Łódź) zidentyfikowano odpowiednio 4 i 3 stopień wielomianu, przy podobnych wartościach błędów transformacji 0.03 m. W przykładach tych zastosowano także ograniczenie polegające na założeniu konforemności przekształcenia.



Rys. 26. Położenie układu lokalnego miasta Łodzi (ŁAM) na tle izoliny zniekształceń liniowych w strefie 1 układu 1965

Jeśli z pierwotnych informacji o układzie lokalnym nie wynika inaczej, zawiązyjemy ogólność modelu wielomianowego tak, aby zachodziła konforemność wzajemnego przekształcenia płaszczyzn. Założenie konforemności jest uzasadnione (na ogół) tym, że sam układ 1965 powstał z odwzorowań konforemnych elipsoidy KRASOWSKIEGO, natomiast układy lokalne, w których nie stosowano praktycznie redukcji odwzorowawczych, był realizowany niejako naturalnie (empirycznie) w sposób konforemny. Doświadczenia empiryczne na układach lokalnych KRAKOWA i ŁODZI w pełni potwierdzają tę zasadę. Przyjmując analogiczne założenia wyznaczono z kolei formuły transformacyjne dla następujących układów lokalnych: WARSZAWA 25, WARSZAWA75, WROCŁAW-GROMNIK, ZIELONA GÓRA, KOSZALIN, RAUENBERG (TORUŃ), RZESZÓW.

Uściślimy teraz wymienione dwa modele wielomianowe transformacji (ogólny - bez założenia konforemności i konforemny).

Ogólny model wielomianowy przekształcenia płaszczyzn układów odwzorowawczych ma postać:

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i,j=0..n} a_{ij} \cdot \underline{x}^i \cdot \underline{y}^j \\ Y &= \sum_{i,j=0..n} b_{ij} \cdot \underline{x}^i \cdot \underline{y}^j \end{aligned} \quad (48)$$

gdzie a_{ij} , b_{ij} oznaczają niewiadome parametry, zaś \underline{x} , \underline{y} - scentrowane i unormowane argumenty wejściowe takie, że:

$$\begin{aligned} \underline{x} &= (x - x_s) \cdot C & \underline{y} &= (y - y_s) \cdot C \\ x, y & - \text{współrzędne punktu w układzie pierwotnym,} \\ x_s, y_s & - \text{ustalone a'priori parametry centrujące,} \\ C & - \text{ustalony a' priori faktor skalujący,} \\ X, Y & - \text{współrzędne aktualne.} \end{aligned}$$

Ze względu na poprawność numeryczną pożądane jest, by parametry centrujące oraz faktor skalujący były tak wybrane aby w całym obszarze transformacji spełnione były warunki: $|\underline{x}| < 1$ i $|\underline{y}| < 1$. Wybór takich parametrów nie sprawia trudności. Jeśli parametry centrujące są współrzędnymi „środka ciężkości” S układu punktów dostosowania, to za stałą C wystarczy wybrać liczbę $1/D_{max}$, gdzie D_{max} oznacza maksymalną odległość punktu transformowanego od środka S.

Parametry wielomianu można estymować algorytmami metody najmniejszych kwadratów w oparciu o znane współrzędne punktów dostosowania.

Należy wspomnieć, że ogólny model wielomianowy ma zastosowanie m.in. w globalnej korekcie empirycznej układu 1965, umożliwiając eliminację istotnych odchyleń systematycznych tego układu. Odpowiednie, wielomianowe funkcje korekcyjne wyznaczono dla wszystkich stref tego układu w oparciu o współrzędne punktów I klasy (punkty te wyznaczono zarówno w układzie 1965 jak też w nowym układzie ETRF'89 na elipsoidzie GRS-80 (tym samym także np. w układzie odwzorowawczym 1992). Korekty funkcjonują praktycznie w systemie GEONET_unitrans [© ALGORES_SOFT]. Jak wynika z przeprowadzonych badań, dla różnych stref układu 1965 adekwatne są wielomiany stopnia 5-7 (zwiększanie stopnia wielomianu nie powoduje istotnego zmniejszenia błędu transformacji przy zachowaniu dostatecznie liczego zbioru punktów dostosowania, co świadczy, że „pozostawione” odchyłki punktów mają już charakter losowy).

Zastosowanie ogólnego modelu transformacyjnego (48) jest uzasadnione także w sytuacji, gdy z góry wiadomo, że co najmniej jeden z układów nie pochodzi z odwzorowania wiernokątnego (dotyczy to często układów lokalnych w koneksji z układami państwowymi, które opierają się na odwzorowaniach wiernokątnych).

Kładąc warunek wiernokątności przekształcenia, model ogólny (48) możemy ograniczyć do mniejszej liczby parametrów sprowadzając go do postaci wielomianu zespolonego (jak wiadomo, ta forma gwarantuje zachowanie wiernokątności przekształcenia):

$$\mathbf{Z} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{z} + \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{z}^2 + \dots + \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{z}^n = \mathbf{a}_0 + \mathbf{z} (\mathbf{a}_1 + \mathbf{z} (\mathbf{a}_2 + \mathbf{z} (\mathbf{a}_3 \dots + \mathbf{z} \cdot \mathbf{a}_n))) \quad (49)$$

gdzie:

$$\mathbf{z} = (\underline{x}, \underline{y})$$

oznacza argument zespolony (parę liczb) scentrowany i unormowany podobnie jak w przypadku wielomianów ogólnych. Współczynniki wielomianu \mathbf{a}_i mają w ogólności postać zespoloną (przechodzą w postać rzeczywistą w przypadku, gdy przekształcenie zachowuje symetryczność względem osi odciętych).

Formuła (49) podobnie jak (48) wyraża oczywiście przekształcenie płaszczyzn:

$$\begin{array}{ccc} (x, y) & \Rightarrow & (X, Y) \quad (\text{inaczej: } \mathbf{z} \Rightarrow \mathbf{Z}) \\ \text{[układ pierwotny]} & & \text{[układ wtórny]} \end{array}$$

w obecnej postaci jako przekształcenie wiernokątne, z którego w łatwy sposób potrafimy określić składowe pola zniekształceń (elementarna skala liniowa i konwergencja mierząca wzajemne skręcenie osi odciętych). Wielkości te wyznacza się w prosty sposób z pochodnej przekształcenia jako funkcji zespolonej

$$d\mathbf{Z}/d\mathbf{z} = (f_x, f_y),$$

$$m = (f_x^2 + f_y^2)^{1/2} \quad (\text{elementarna skala liniowa})$$

$$\gamma = -\text{arc tg} (f_y / f_x) = -\text{arc sin} (f_y / m) \quad (\text{konwergencja})$$

Omówione powyżej modele transformacyjne można estymować dla konkretnych układów lokalnych posługując się procedurą TRANS_xy (opcjonalnie: ogólnowielomianową, konforemną) w pakiecie GEONET [© ALGORES_SOFT]. Analogiczną procedurę konforemną dołączono również do programu SWDE_konwertor [16], wykonanego na zlecenie GUGiK w celu konwersji wektorowych map ewidencyjnych zapisanych w formacie SWDE, do układu 2000.

Model przekształcenia wiernokątnego możemy zastosować również przy tworzeniu formuł aproksymacyjnych dla par układów powstałych z odwzorowań wiernokątnych tej samej elipsoidy (przeliczenia współrzędnych pomiędzy sąsiednimi strefami układu).

W systemie GEONET [© ALGORES_SOFT] skonstruowano na podobnej zasadzie korekty empiryczne układu 1965. Zastosowano przy tym (alternatywnie) modele ogólnowielomianowe (lokalnie afiniczne) lub konforemne. Wyznaczono je dla każdej strefy układu 1965 w oparciu o punkty dostosowania i klasy państwowej. Umożliwiają one eliminację lokalnych błędów systematycznych rzeczywistego (zrealizowanego przez osnowy) układu 1965 w stosunku do układów nowych (2000, 1992). Korekty pierwszego rodzaju wprowadzono również w programie SWDE_konwertor [16].

16.3. Przykładowy protokół wyników (fragmenty) wyznaczenia parametrów transformacji konforemnej stopnia 2 w programie TRANS_XY

Poniżej zamieszczono fragmenty protokołu estymacji parametrów transformacji konforemnej stopnia 2 pomiędzy pewnym układem lokalnym a układem „1965” w strefie 4 (może „straszyć” zbyt przesadna liczba punktów dostosowania – ponad 3000, dająca jednak wysoką niezawodność finalnej formuły transformacyjnej).

```
-----  
TRANSFORMACJA KONFOREMNA W SYSTEMIE <GEONET>  
c)2000, ALGORES_SOFT s.c. www.geonet.net.pl  
-----
```

OBIEKT: c:\UNITRANS\Obiekty\ZIEL

STOPIEŃ TRANSFORMACJI: 2

CHARAKTERYSTYKA ZBIORÓW DANYCH:

Liczba punktów zbioru pierwotnego = 3199

Liczba punktów zbioru wtórnego = 3199

Liczba punktów łącznych(wspólnych)= 3199

Rozciągłość obszaru zbioru punktów łącznych:

Xmax-Xmin = 14618.03 m

Ymax-Ymin = 9289.05 m

Rmax = 15378.47 m

Rsr. = 2803.75 m

PARAMETRY TRANSFORMACJI:

s := 6.50217628111719E-0005; {skala normująca}

Parametry przesunięcia (współrzędne środków ciężkości):

xs1:= 16589.47405; ys1:= 50077.72686; {układ pierwotny}

xs2:= 5657471.02740; ys2:= 3622799.71780; {układ wtórny}

Współczynniki wielomianu zespolonego i błędy średnie:

a[0]:= 2.41378578851335E-0004;

b[0]:= -2.54679639755715E-0005;

a[1]:= 1.53747526753172E+0004;

b[1]:= 2.47358333454308E+0002;

a[2]:= -2.52112917126167E-0002;

b[2]:= -1.75022110433900E-0002;

Wzory transformacyjne (wielomian zespolony stopnia n:

$W = c[0] + z*(c[1] + z*(c[2] + z*(c[3] + \dots + z*(c[n-1] + z*c[n])))$

$c[i] = (a[i], b[i])$ - współczynniki zespolone, $i=0,1,2,\dots$

$z = (u,v)$ - argument zespolony, $u = (x1-xs1)*s$, $v = (y1-ys1)*s$

$x1,y1$ - współrzędne w układzie pierwotnym, s - skala normująca

$W = (x2-xs2, y2-ys2)$; $x2,y2$ - współrzędne wynikowe }

ODCHYLEKI, BŁĄD ŚREDNI JEDNOSTKOWY I BŁĄD TRANSFORMACJI:

Wykaz odchyłek na punktach łącznych:

Nr punktu dx dy [x,y dane minus x,y obliczone]

431218 -0.0573 0.0511

233603 0.0228 -0.0193

233607 0.0252 -0.0487

233608 0.0293 -0.0393

413204 -0.0382 -0.0388

414250 0.0024 -0.0425

..... itd

4111798 0.0045 0.0020

4111799 -0.0017 -0.0026

4111800 0.0011 0.0038

4111801 0.0008 0.0021

4111802 0.0014 -0.0070

4111803 0.0025 -0.0013

4111804 0.0073 0.0098

4111805 0.0029 -0.0002

4111806 -0.0021 -0.0024

..... itd

4141248 -0.0105 -0.0152
 4141249 -0.0013 -0.0039
 4141250 0.0009 -0.0063
 4141251 -0.0047 -0.0038
 4141252 0.0020 -0.0016
 4141253 -0.0063 0.0006
 4141254 -0.0065 -0.0046
 4141255 -0.0024 -0.0052
 4141256 -0.0030 -0.0129
 4141257 -0.0037 -0.0148
 4141258 -0.0052 -0.0156
 4141259 -0.0115 -0.0127

..... itd

Sredniokwadratowe odchyłki współrzędnych:

dxs = 0.0050 dys = 0.0088

Ilość elementów nadwymiarowych układu lu = 6392

Błąd średni jednostkowy (dla współrzędnej) mo = 0.0072

Błąd transformacji (dla punktu) mt = 0.0101

WYKAZ WSPÓLRZĘDNYCH PO TRANSFORMACJI

Nr punktu	Układ pierwotny		Układ wtórny			mx	my
	x1	y1	x2	y2			
431218	25352.3400	57372.5500	5666113.8873	3630233.2289		0.0015	0.0015
233603	21085.5600	49471.8900	5661975.4772	3622266.3793		0.0003	0.0003
233607	19816.5800	46353.9700	5660757.0348	3619129.0087		0.0003	0.0003
233608	19826.7500	48021.5500	5660740.3807	3620796.2393		0.0002	0.0002
233609	19492.5200	50633.5400	5660364.2437	3623402.0513		0.0002	0.0002
234650	21808.7800	52074.0300	5662656.6252	3624879.3508		0.0004	0.0004
411104	17138.7800	50595.0800	5658011.8443	3623325.7472		0.0001	0.0001
411106	16561.5900	50172.8400	5657441.6224	3622894.3533		0.0001	0.0001

..... itd

41110606	16710.6310	49974.5660	5657593.8067	3622698.5372		0.0001	0.0001
41110607	16663.6570	49958.4070	5657547.1070	3622681.6276		0.0001	0.0001
41110608	16663.8710	49957.8020	5657547.3306	3622681.0262		0.0001	0.0001
41110633	16719.1640	49959.7200	5657602.5758	3622683.8330		0.0001	0.0001

OBLICZONE POPRAWKI HAUSERBRANDTA, WSPÓLRZĘDNE SKORYGOWANE

Nr punktu	dx	dy	x2(skór)	y2(skór)	mp
431218	-0.0573	0.0511	5666113.8300	3630233.2800	0.0021
233603	0.0228	-0.0193	5661975.5000	3622266.3600	0.0004
233607	0.0252	-0.0487	5660757.0600	3619128.9600	0.0005
233608	0.0293	-0.0393	5660740.4100	3620796.2000	0.0004
233609	0.0063	-0.0213	5660364.2500	3623402.0300	0.0003
234650	0.0048	-0.0008	5662656.6300	3624879.3500	0.0006
411104	0.0057	-0.0372	5658011.8500	3623325.7100	0.0002

..... itd

13162901	-0.0051	0.0018	5653502.0600	3622255.0400	0.0004
13162902	-0.0017	0.0021	5653502.6000	3622254.6900	0.0004
13162903	0.0007	-0.0007	5653473.2600	3622214.5900	0.0004
13162904	0.0021	-0.0003	5653473.8000	3622214.2400	0.0004
13162905	0.0002	0.0013	5653452.0500	3622186.0300	0.0004
13162906	0.0004	0.0007	5653452.5800	3622185.6700	0.0004
13162933	0.0004	0.0038	5653464.2700	3622189.3700	0.0004

..... itd

34116633	-0.0014	-0.0102	5660804.8200	3624944.7500	0.0004
34121101	-0.0019	-0.0052	5660846.9100	3625094.0200	0.0004
34121102	0.0006	-0.0078	5660847.4500	3625094.3600	0.0004
34121103	-0.0007	-0.0063	5660845.6100	3625134.1300	0.0004
34121104	0.0031	-0.0065	5660845.1300	3625134.5500	0.0004
34121108	0.0022	-0.0084	5660890.7600	3625221.6900	0.0004

..... itd

34121605	-0.0021	-0.0104	5660687.3500	3625212.9500	0.0004
34121606	0.0000	-0.0141	5660687.8300	3625212.5200	0.0004
34121633	0.0013	-0.0087	5660754.7000	3625258.4600	0.0004

41110404	-0.0020	-0.0009	5658363.5200	3623230.5600	0.0002
41110405	0.0011	-0.0049	5658320.2400	3623222.3600	0.0002

..... itd

16.4. Przykładowe pliki parametrowe umożliwiające transformacje pomiędzy układem lokalnym a układami państwowymi (pliki wykorzystywane w programach: GEONET_unitrans, SWDE_konwertor)

Poniżej podano przykładowe pliki parametrowe (standardowa nazwa pliku: **par.lok**) służące do bezpośrednich przeliczeń współrzędnych pomiędzy danym układem lokalnym a układami państwowymi w cytowanych programach (program **SWDE_konwertor** realizuje konwersję mapy ewidencyjnej zapisanej w formacie tekstowym **SDWE**). Konstrukcja pliku parametrowego oparta jest na transformacji wiernokątnej. Parametry są „pobierane” z protokołów, którego przykład zamieszczono w p. 3. Pełny zbiór parametrów w pliku **par.lok** wymaga wykonania transformacji w dwóch „kierunkach”: **xy65 => xy_lok** oraz **xy_lok => xy65**

Przykład pliku **par.lok** dla układu lokalnego miasta Krakowa:

```
-----
KRAKÓW = nazwa układu
1       = numer strefy układu 1965
4       = stopień wielomianu
5403753.61418 4557547.72030  współrzędne środka w układzie 1965
-30499.58245 291170.64554   " " " lokalnym
0.5E-04 = skala normująca dla transformacji xy65=> xy_lok
-0.00344 0.02510 = (a0 , b0) parametry
-19988.03650 -787.46628 = (a1 , b1) wielomianu
-0.16910 0.21915 = (a2 , b2) zespolonego
0.01626 -0.01319 = (a3 , b3) stopnia n = 4
-0.05485 0.01096
0.5E-04 = skala normująca dla transformacji odwrotnej
-0.00245 0.02521 = (a0 , b0) parametry
-19980.95793 787.18741 = (a1 , b1) wielomianu
-0.14201 0.23743 = (a2 , b2) zespolonego
-0.01398 0.01558 = (a3 , b3) stopnia n = 4
-0.05160 0.02146 = (a4 , b4)
-----
```

Przykład pliku **par.lok** dla układu lokalnego miasta Łodzi (układ ŁAM):

```
-----
LÓDŹ = nazwa układu
1     = numer strefy
3     = stopień wielomianu
5595135.1707 4525205.3608 : współrzędne 1965 środka układu
50000.0000 50000.0000 : współrzędne lokalne środka układu
6.0e-5 = skala normująca dla transformacji xy65 => xy_lok.1
0.00000 0.00000 = ( a0 , b0 ) "
16663.47490 -367.83707 = ( a1 , b1 ) "
-0.21675 -0.17077 = ( a2 , b2 ) "
-0.02158 -0.02010 = ( a3 , b3 ) "
6.0e-5 = skala normująca dla transformacji xy_lok => xy65.1
0.00000 0.00000 = ( a0 , b0 ) "
16661.74009 367.79877 = ( a1 , b1 ) "
0.20495 0.18470 = ( a2 , b2 ) "
0.01972 0.02192 = ( a3 , b3 ) "
-----
```

Analogiczne pliki parametrowe służą do bezpośredniej konwersji map wektorowych przy wykorzystaniu specjalnych aplikacji dla środowisk: MICROSTATION i AutoCAD.

16.5. Zastosowania specjalne

Na zakończenie podaję fragmenty opracowania naukowo-technicznego w ramach pracy badawczej realizowanej przez MGGP s.a. w Nowym Sączu, której celem było opracowanie technologii modernizacji ewidencji gruntów i budynków na terenach gdzie funkcjonują mapy katastralne w skali 1:2880, z wykorzystaniem metod fotogrametrii cyfrowej.

.....
Zasady wyznaczania empirycznych formuł transformacji współrzędnych pomiędzy dawnym układem katastralnym a układem państwowym „1965” na przykładzie wybranych obiektów w gminie Poronin

a) Sformułowanie problemu

Generalnym celem tematu badawczego jest opracowanie wytycznych technicznych dla technologii modernizacji ewidencji gruntów i budynków na obszarach Polski południowej, gdzie – poza istniejącą nową częścią opisową (w MSEG 3.0) – część graficzna opiera się na archiwalnych mapach katastralnych w skali 1:2880 (wzorniki map katastralnych zaadoptowano do celów ewidencji w roku 1967). Efektem modernizacji mają być mapy numeryczne wykonane w aktualnie obowiązującym jeszcze układzie państwowym 1965. (ewentualne przejście do innych układów współrzędnych, na przykład do układu 2000 jest już dzisiaj standardowym zadaniem kartografii numerycznej – jednoznaczne algorytmy podane są w nowych Wytycznych Technicznych G-1.10).

Zakłada się, że w technologii modernizacji ewidencji, obok zeskanowanych wzorników map katastralnych (zapisanych w postaci rastrowej) oraz części opisowej ewidencji, możliwe będą do wykorzystania następujące materiały lub zbiory informacji:

- Zdjęcia lotnicze z roku 1981 w skali 1:5000 i wykonane z tych zdjęć ortofotomapy w układzie 1965, rejestrujące stan faktyczny podziałów gruntowych, tj. granic władania i granic użytków (umożliwiające ich weryfikację ze stanem ewidencyjnym). Podkład ortofotomapy uzupełniony o treść pozyskaną z rastrów map katastralnych stanowiłyby więc podstawę do wykonania poprawnych pod względem kartograficzno-numerycznym map ewidencyjnych w układzie 1965.
- Punkty osnów geodezyjnych oraz punkty sytuacyjne z operatów jednostkowych (podziałów, rozgraniczeń), z których część posiada współrzędne zarówno w układzie katastralnym jak też w docelowym układzie 1965.

Z punktu widzenia kartografii numerycznej jest oczywiste, że dla poprawnego wykonania zadania musimy w pierwszej kolejności dążyć do ustalenia matematycznych formuł transformacji pomiędzy układem katastralnym, w którym wykonane były mapy archiwalne, a układem 1965 (lub innym), w którym funkcjonuje państwowa osnowa geodezyjna (jest to również warunek poprawnego – zgodnie ze sztuką geodezyjną – funkcjonowania przyszłego katastru).

Znajomość odpowiednich formuł matematycznych pozwoli bowiem na odpowiednie przekształcenie obrazów rastrowych z układu katastralnego do układu 1965 i realizację dalszej części technologii prowadzącej do wykonania numerycznej mapy ewidencyjnej w układzie 1965. Powstaje oczywiście problem sposobu pozyskania takich formuł, a przy tym niepewność co do jakości (regularności) realizacji dawnego układu katastralnego (fizyczna realizacja układu następuje poprzez osnowy geodezyjne, a te są obarczone błędami pomiarów i obliczeń). Oprócz kwestii osnów wyższych rzędów, wiadomo na przykład, że mapy katastralne były tworzone głównie metodą stolikową, a to określa już pewien poziom lokalnych błędów mapy, o charakterze przypadkowym, które są już jej stałą cechą jakościową nie dającą się poprawić przez numeryczne przetworzenia. Powyższe kwestie były przedmiotem analiz (głównie na bazie ortofotomapy) i wniosków dotyczących przewidywalnych efektów jakościowych proponowanej technologii.

Aktualnie, w zasobach państwowej służby geodezyjno-kartograficznej, nie istnieją dane numeryczne, które pozwalałyby na bezpośrednie przeliczenie analityczne punktów z dawnych układów katastralnych do aktualnych układów państwowych (lub odwrotnie). Jedynym sposobem utworzenia potrzebnych formuł transformacyjnych są metody empiryczne wykorzystujące punkty dostosowania (punkty posiadające współrzędne w obu układach). Istotnym elementem takiego podejścia jest również wybór modelu transformacji, na co składa się:

- ograniczenia dotyczące rodzaju dopuszczalnych zniekształceń obrazu względem układu pierwotnego (afiniczność, konforemność),
- stopień wielomianu funkcji przekształcenia.

Wiadomo, że aktualnie obowiązujące układy (1965, 2000, 1992) cechują się konforemnością odwzorowania powierzchni elipsoidy. Niezależnie od własności odwzorowania przyjętego w układzie katastralnym, możemy założyć, że układ ten, co najmniej w ograniczonych obszarach lokalnych był realizowany w sposób naturalny wiernokątnie, bowiem istotnym elementem kształtującym geometrię układów pomiarowych były kąty (klasyczną konstrukcją sieci wyższych rzędów stanowiły triangulacje). Pomijając mało istotną w tym przypadku kwestię różnych elipsoid odniesienia możemy przyjąć tezę, że zasadnicze wzory transformacyjne pomiędzy układami powinny się opierać na założeniu wiernokątności.

W kwestii doboru stopnia wielomianu transformującego musimy uwzględnić fakt, że - niezależnie od cechy wiernokątności odwzorowań – elementarna skala liniowa nie jest wielkością stałą. Istotna zmiana tej skali może nastąpić już na odcinkach kilkukilometrych. Z powyższego względu należy z zasady wykluczyć możliwość stosowania popularnej, wiernokątnej transformacji *Helmerta* jako przekształcenia liniowego. Jako minimalny stopień transformacji należy więc przyjąć: 2.

Powyższe uwagi syntetyzują się w konkretny program wyznaczenia poszukiwanych formuł transformacji pomiędzy układami.

b) Estymacja formuł transformacyjnych pomiędzy układem katastralnym a układem „1965”

W oparciu o wstępną analizę zadania i dostępne materiały przyjęto następujące etapy postępowania związane z identyfikacją (estymacją) formuł transformacyjnych pomiędzy układami:

- ETAP 1: Rektyfikacja wzorników map katastralnych ze względu na deformacje arkuszy względem ich wymiarów i kształtów nominalnych (kalibracja rastrów na formaty zdefiniowane przez nominalne wymiary i kształty arkuszy map). Ten wstępny etap przetworzenia rastrów oryginalnych rastrów map jest bardzo istotny ze względu na eliminację błędów systematycznych wywołanych deformacją dawnych materiałów kartograficznych i odtworzenie w układzie map faktycznego układu prostokątnego, założonego przy tworzeniu map. Ponieważ nominalne wymiary arkuszy są znane (po przeliczeniu z cali na jednostki metryczne), więc wykonanie zadania jest jednoznaczne. Pewne problemy mogą pojawić się w przypadku uszkodzeń fizycznych arkuszy. Wtedy alternatywą pozostają inne, definiowane punkty ramki arkuszy.
- ETAP 2: Wyznaczenie przybliżonych formuł transformacji pomiędzy układami w oparciu o zachowane punkty osnów, posiadające współrzędne w obu układach lub w oparciu o inne punkty pozyskane z operatów jednostkowych (rozgraniczenia, podziały), a także w oparciu o bezpośrednie pomiary w terenie mające na celu wyznaczenie współrzędnych wybranych punktów sytuacyjnych w układzie 1965 poprzez nawiązanie się do istniejącej osnowy geodezyjnej. Na podstawie przeprowadzonych testów na obiektach gminy Poronin wnioskuje się, by na tym etapie, wykorzystując wymienione punkty dostosowania, wyznaczyć parametry możliwie prostej transformacji konforemnej (Helmerta lub wielomianowej stopnia $n=2$). Wyznaczone parametry transformacji (przybliżonej) posłużą z kolei do wstępnego przeliczenia narożników arkuszy map do układu 1965 i wykonania (także wstępnej) kalibracji rastrów w tym układzie. Uzyskanie przybliżonych obrazów map katastralnych w tle warstw ortofotomapy ma na celu wspomoczenie poprawnego wykonania etapu 3, w którym najważniejszym zadaniem będzie identyfikowanie tych samych punktów sytuacyjnych (na obrazie mapy

katastralnej oraz na ortofotomapie). Nałożenie obu obrazów (jakkolwiek tylko przybliżone) pozwoli uniknąć wielu błędów grubych (omyłek identyfikacji). Zadanie to wykonano z powodzeniem na obiektach doświadczalnych.

- ETAP 3: Identyfikacja punktów sytuacyjnych (głównie trójmiedz) na obrazie mapy katastralnej i ortofotomapy z pomiarem współrzędnych w obu układach (katastralnym i 1965) i ostateczne wyznaczenie formuł transformacji. Zakłada się, że podstawą wykonania ostatecznej estymacji formuł transformacji pomiędzy układami będzie masowy zbiór punktów sytuacyjnych jako punktów dostosowania, przy założeniu, że punkty te są rozmieszczone równomiernie w obszarze całego obiektu, a przede wszystkim na jego obrzeżach. Z doświadczeń zebranych na obiekcie pilotowym w gminie Poronin wynika, że wystarczająca do opisywanego celu liczba punktów powinna wynosić od kilkudziesięciu do kilkuset punktów na arkusz. W tej liczbie dopuszcza się oczywiście przypadki błędów grubych lub tzw. elementów odstających, które powinny być wykluczone z ostatecznej estymacji.

c) Wnioski

Z doświadczeń na obiektach pilotowych w gminie Poronin można sformułować następujące wnioski:

- W obszarze o rozciągłości nie przekraczającej 10km wystarczającym modelem matematycznym transformacji jest przekształcenie wiernokątne stopnia drugiego. Można je zapisać ogólnie za pomocą funkcji wielomianu zespolonego stopnia $n=2$:

$$Z = a_0 + a_1 \cdot z + a_2 \cdot z^2 \quad (50)$$

gdzie $Z = (X, Y)$ jest przekształconym punktem w układzie 1965 (wrotnym), a_0, a_1, a_2 - zespolone parametry wielomianu (pary liczb - współczynników transformacji), z - scentrowane względem środka ciężkości obszaru i unormowane parametrem skalującym współrzędne pierwotne (katastralne):

$$z = (x - x_0) \cdot \alpha \quad \bar{z} = (y - y_0) \cdot \alpha$$

(x, y) - współrzędne punktu w układzie katastralnym, (x_0, y_0) - współrzędne ustalonego punktu centrującego (może to być np. środek ciężkości układu wszystkich punktów transformowanych), α - faktor skalujący taki, że $||z|| < 1$. Podwyższenie stopnia wielomianu nie powoduje istotnego zmniejszenia odchyłek transformacji i samego błędu transformacji. Z drugiej strony, obniżenie tego stopnia do transformacji liniowej (Helmerta) powoduje istotny wzrost błędu zwłaszcza na brzegach obszaru.

- Uzyskane odchyłki współrzędnych punktów dostosowania względem tego modelu transformacji wiernokątnej stopnia $n = 2$, kształtują się na poziomie 1-3m. Sporadycznie większe odchyłki wynikają z identyfikacji punktów ale istotny składnik błędu ma jednak genezę pierwotną (pochodzi z różnorodnych czynników zakłócających w procesie tworzenia mapy metoda stolikowa), zaś niewielki stosunkowo składnik tego błędu rzędu 0.20 - 0.30 m może pochodzić od czynności związanych z kalibracją arkuszy rastrów do wymiarów nominalnych (1 ETAP). Błędy z tytułu budowy modelu fotogrametrycznego szacuje się natomiast na poziomie przeciętnym nie przekraczającym wartości 0.10m

- Błąd transformacji odnosi się do typowego punktu dostosowania. Nie dotyczy natomiast dokładności względnej pary bliskich sobie punktów transformowanych, która jest istotnie wyższa, rzędu dokładności względnej pomiarów sytuacyjnych metodą stolikowa. Wynika stąd wniosek, że w opisywanej technologii przetworzenia map katastralnych możemy się spodziewać zachowania lokalnego kształtu i wymiarów obiektów geometrycznych mapy (działek). Trudniej będzie natomiast wyeliminować efekt lokalnych przesunięć lub skręceń pewnych podobszarów, które mogą osiągać liniowo wartości kilkumetrowe. W takiej sytuacji można zalecać opracowanie specjalnej metody eliminacji tych zniekształceń przy wykorzystaniu narzędzi programistycznych obsługujących raster (kalibracje dodatkowe wskazanych obszarów lokalnych).

- Opracowana metodologia przetworzenia archiwalnych map katastralnych, ze względu na wymienione jej cechy jakościowe, nie musi stanowić finalnego produktu numerycznej mapy ewidencyjnej, lecz może mieć znaczenie przejściowe w procesie sukcesywnej aktualizacji tej mapy. Ważnym i z pewnością opłacalnym efektem jest przejście z całym archiwalnym zasobem kartograficznym do układu, w którym funkcjonują osnowy geodezyjne. Bez tego statusu mapy nie jest możliwe poprawne funkcjonowanie katastru oraz budowanie i integrowanie zadań nowoczesnego SIT. Aktualizacja takiej mapy nie musi być procesem natychmiastowym, lecz może być rozłożona w czasie, w zależności lokalnych prac związanych z rozgraniczeniami i podziałami. Ważne jest to, że proces taki będzie realizowany w oparciu o jednolitą osnowę geodezyjną. Wprowadzanie zmian do części graficznej ewidencji powinno być oparte na specjalnym oprogramowanym algorytmie, zakładającym minimalną deformację obiektów geometrycznych bezpośrednio sąsiadującym z obiektem aktualizowanym.

W konkluzji można stwierdzić, że proponowana technologia jest ekonomicznie racjonalna i technicznie uzasadniona. Przy wykorzystaniu dostępnych zdjęć i tanich opracowań fotogrametrycznych pozwala w znacznym stopniu przyspieszyć prace dotyczące części graficznej ewidencji gruntów na znacznych obszarach południowej Polski. Nawet jeśli nie będzie to produkt o ostatecznie pożądanym cechach jakościowych, otwiera już prostą drogę do takiego celu. Inne rozwiązania nie wydają się dziś realne ze względów ekonomicznych.

17. Programy obliczeniowe

Na zakończenie wykładów prezentujemy przykładowe programy komputerowe uzupełniając je uwagami dotyczącymi tworzenia i stosowania podobnego lub innego typu aplikacji. Samo matematyczne przeliczanie współrzędnych nie zawsze spełnia wymagania praktyczne. Z reguły, jeśli dotyczy to układu **1965**, należy uwzględnić dodatkowe korekty, by wpasować się możliwie najlepiej w układ realnie istniejący (empiryczny), określony przez punkty osnów geodezyjnych.

17.1. Program TransPol

Program o nazwie **TRANSPOL** [1] powstał jako załącznik (na płycie CD-R) do nowej edycji **Wytycznych Technicznych G-1.10**. Zgodnie z założeniem wydawcy, program ma przeznaczenie testowe i kontrolne, odnoszące się do metod i algorytmów opisanych w treści wytycznych, a także w formie ogólnej - w Instrukcji Technicznej G-2 [2]. Program realizuje więc matematyczne przeliczenia współrzędnych pomiędzy układami płaskimi: **1965, 1942, GUGIK-80, 1992, 2000, UTM** (dla stref polskich) oraz układami współrzędnych geograficznych - geodezyjnych **BLH** i kartezjańskich **XYZ** elipsoid: **GRS-80** i **Krasowskiego**.



Rys. 27. Ilustracja funkcji programu **TRANSPOL**

Dodatkowymi funkcjami numerycznymi programu są:

- Transformacje wysokościowe pozwalające na przeliczenie wysokości elipsoidalnych na normalne (lub odwrotnie). Mogą być one realizowane dwiema metodami (menu **TRANS_H** -rys.27):
 - w oparciu o numeryczny model geoidy niwelacyjnej (wielkości odstępów geoidy od elipsoidy **GRS-80**, zapisanej w pliku binarnym dla całego obszaru Polski w siatce punktów o rozdzielczości minutowej),
 - poprzez lokalną aproksymację geoidy (quasi-geoidy) w oparciu o dostępny zbiór punktów dostosowania o wyznaczonych wysokościach niwelacyjnych.

Uwaga: w ostatecznej wersji publikacyjnej programu występuje tylko pierwsza metoda.

- Transformacja *Helmerta* (przez podobieństwo), uruchamiana w menu **TRANS_XY**, będąca m.in. narzędziem do realizacji korekt lokalnych układu **1965**.

W środowisku programu **TRANSPOL** dostępny jest edytor tekstowy, umożliwiający przygotowanie lub importowanie zbiorów wejściowych oraz eksportowanie lub drukowanie protokołów wynikowych. Należy podkreślić, że wszelkie zbiory wejścia - wyjścia mają postać tekstową co daje możliwość łatwego „kontaktu” z innymi aplikacjami geodezyjnymi lub kartograficznymi. Wszelkie zbiory danych są przyporządkowane dowolnie definiowanym obiektom, a te odpowiadają w sposób naturalny podkatalogom folderu **OBIEKTY**. Pewną wadą programu może być to, że dla wszystkich zbiorów wejścia-wyjścia przyjęto ściśle określone nazwy standardowe, skrócone z nazwami układów współrzędnych. Owa „sztywność” nazw sprzyja jednak pewnemu „ładowi” w zarządzaniu danymi (teza ta potwierdziła się na przykład kilkuletnimi doświadczeniami w eksploatacji systemu obliczeniowego **GEONET**). Przykładowo, wejściowe zbiory współrzędnych układów **1965, 1942, 1992, 2000** nazywają

się odpowiednio: **xy65, xy42, xy92, xy2000**. Zbiory współrzędnych geograficznych - geodezyjnych mają natomiast nazwy: **blh42** (dla elipsoidy **Krasowskiego**), **blh92** (dla elipsoidy **GRS-80**). Zbiorom wynikowym przypisywane są automatycznie podobne nazwy ale z rozszerzeniem ***.1** (rozróżnienie takie jest oczywiście konieczne, przy czym usuwając rozszerzenie, możemy je użyć wprost jako zbiory wejściowe do dalszych przeliczeń). Jeśli zbiór wynikowy dotyczy układu odwzorowawczego, to dla każdego przeliczonego punktu, oprócz współrzędnych x, y wyznaczane są również elementy pola zniekształceń odwzorowawczych, a mianowicie:

- elementarne zniekształcenie długości w [cm/km],
- konwergencja (zbieżność południków) w gradach.

Dodatkowe informacje (komentarze) mają na celu identyfikowanie strefy odwzorowawczej danego układu. Przykład fragmentu pliku wynikowego **xy2000.1** podano w tabeli 10.

Obsługa programu jest bardzo prosta. Zasadnicza część okna głównego jest podzielona na dwie części, odpowiadające zbiorom informacji wejściowych i wynikowych. Na liście zbiorów wejściowych i wynikowych oraz w okienkach parametrów (stref) należy zaznaczyć właściwe pozycje i zainicjować obliczenia widocznym u góry przyciskiem.

Program ma możliwość bezpośrednich przeliczeń współrzędnych pomiędzy strefami tego samego układu podstawowego (np. **1965, 2000, 1942**). Niestety, w przypadku układu **1965** program **TRANSPOL** nie posiada „narzędzia” korekt globalnych [por. GEODETA 12/2000] więc bezpośrednie przeliczenie między strefami dokonuje się tylko poprzez współrzędne matematyczne. Dla zastosowania korekt lokalnych należałoby dysponować współrzędnymi katalogowymi punktów łącznych w obu strefach układu pomiędzy którymi takie przeliczenie następuje.

Tabela 10

Nr	x	y	zniekształcenie [cm/km]	konwergencja [°]	informacje o strefie
5	5562200.0236	7597703.0263	4.020	1.167853	<2000> Lo = 21
16	5565284.4975	7600726.5584	4.756	1.205163	<2000> Lo = 21
4053	5560754.2884	7601924.9431	5.055	1.217737	<2000> Lo = 21
2022	5563768.8547	7605674.9741	6.010	1.263733	<2000> Lo = 21
19	5563975.6059	7607407.0103	6.463	1.284521	<2000> Lo = 21
...

Korekty lokalne układu **1965** można zrealizować poprzez funkcję **TRANS_XY**. W tym przypadku zbiory danych (wykazy współrzędnych pierwotnych i aktualnych) powinny mieć odpowiednie nazwy standardowe: $xy1, xy2$. W zbiorach wynikowych, opatrzonych konieczną analizą dokładności transformacji, otrzymujemy m.in. wykaz współrzędnych z uwzględnieniem korekty Hausbrandta.

17.2. Program GEONET[®]_unitrans

Program **GEONET_unitrans** jest wyodrębnionym modułem systemu obliczeniowego **GEONET**, obejmującym m.in. zadania obliczeniowe sieci geodezyjnych. W aktualnej wersji 7.1 stanowi pełną aplikację dla **WINDOWS' 95, '98, 'NT (2000)**. W stosunku do programu **TRANSPOL** zawiera następujące funkcje dodatkowe:

■ Realizacja korekt globalnych (dla każdej strefy) układu **1965** w dwóch wersjach (przyciski w dolnej części okna - rys. 28) :

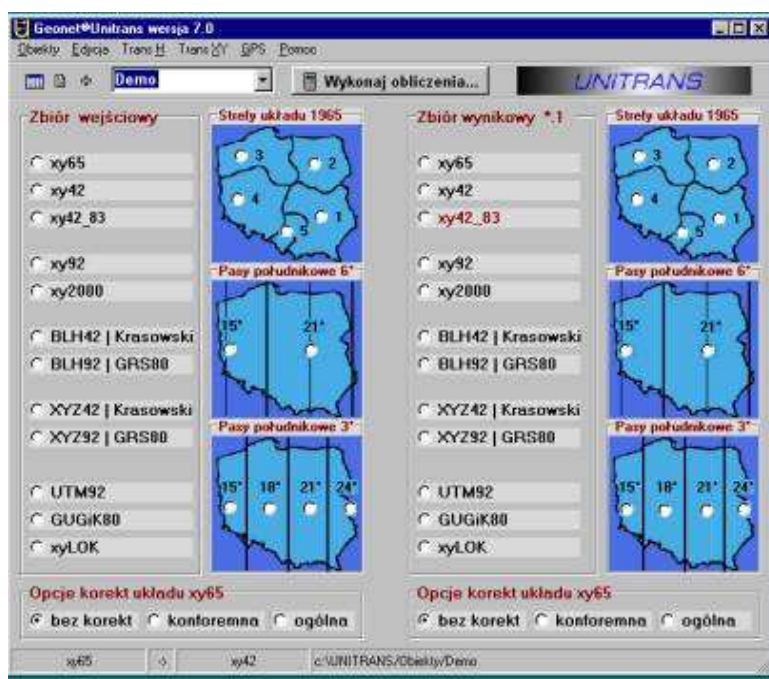
- konforemnej, poprzez zastosowanie algebraicznych wielomianów zespolonych (opcja ta umożliwi zachowanie lokalnego kształtu figur pomiędzy układem wejściowym I wynikowym, co ma znaczenie na przykład przy transformacji sieci GPS),
- ogólnej (niekonforemnej), poprzez zastosowanie ogólnych wielomianów algebraicznych. Opcja ta umożliwi „lepsze” wpasowanie się w układ rzeczywisty **1965** określony przez współrzędne katalogowe punktów, osiągając dokładność wpasowania wyższą niż dokładność kartometryczna archiwalnych wydawnictw mapy zasadniczej. Z tego względu korekta ta może mieć zastosowanie na przykład przy przekształcaniu zwektoryzowanych obrazów tej mapy do nowych układów odwzorowawczych.

Korekty globalne umożliwiają „automatyczne” wpasowanie się w empiryczny układ **1965** (określony przez archiwalne współrzędne punktów) lub (przy wychodzeniu z empirycznego układu **1965**) eliminację błędów systematycznych tego układu. Będzie to mieć zapewne istotne znaczenie przy przeliczeniach masowych z układu **1965** do układu **2000**. Pilnie potrzebnym praktycznie zadaniem może okazać się wtedy przeliczenie współrzędnych pomiędzy strefami empirycznego układu **1965**. Korekty globalne umożliwią wykonanie takiego zadania gdy z powodu braku punktów łącznych wykonanie korekty lokalnej nie będzie możliwe. Należy zaznaczyć jednak, że jeśli dysponujemy odpowiednim zbiorem punktów łącznych, zastosowanie korekty globalnej nie wyklucza możliwości dodatkowego wykonania korekty lokalnej (łącznie z post-transformacyjną korektą Hausbrandta). Funkcję tę przejmuje już podprogram **TRANS_XY**.

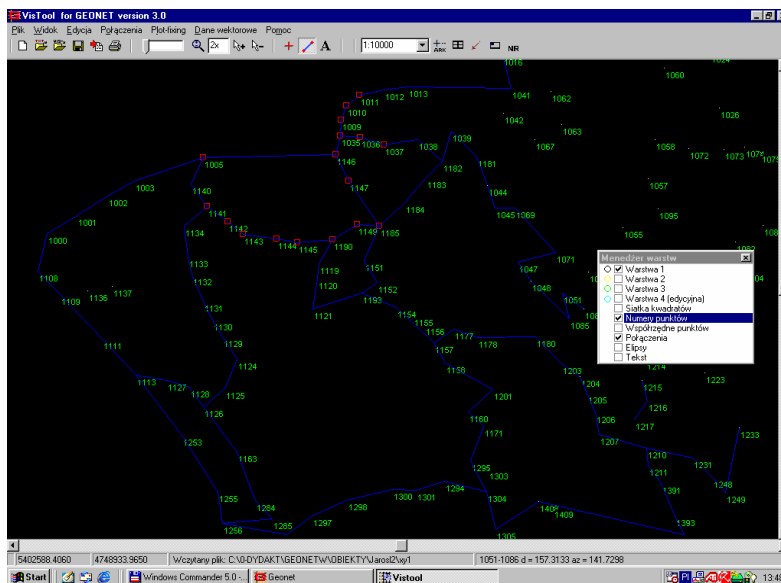
■ Transformacje wielomianowe (konforemne i ogólnowielomianowe) do stopnia $n = 9$ włącznie, realizowane dla dowolnej pary zbiorów współrzędnych pierwotnych (xy_1) i aktualnych (xy_2) (funkcja **TRANS_XY**). Funkcja ta jest „wyposażona” opcjonalnie w korektę post-transformacyjną Hausbrandta, dzięki czemu może być użyta w szczególności jako narzędzie korekty lokalnej przy operacjach związanych z układem **1965**.

■ Uwzględnienie układów lokalnych w zadaniach transformacji współrzędnych. W konstrukcji programu **GEONET@_unitrans** założono, że przejście pomiędzy jakimś układem lokalnym a innym stosowanym układem (np. **1992**, **2000**) odbywa się (wewnętrznie) za pośrednictwem układu **1965**. W tym celu należy dołączyć do programu odpowiedni dla danego układu lokalnego plik parametrowy o nazwie **par.lok** (plik umieszcza się w wybranym folderze roboczym, w którym zamierzamy wykonywać stosowane przeliczenia współrzędnych). Utworzenie plików parametrowych umożliwia omówiona powyżej funkcja transformacji konforemnej w menu **TRANS_XY** (wstępne analizy tego zadania potwierdzają, że pomiędzy układami lokalnymi a układem **1965** adekwatne jest założenie wierności przekształcenia, przy czym dla układów lokalnych na obszarach o rozpiętości powyżej 5 km nie wystarcza zastosowanie liniowej transformacji przez podobieństwo (Helmerta) - ze względu na zmienność skali układu **1965** należy stosować wielomiany stopnia wyższego od 1). Do tego celu muszą być oczywiście dane współrzędne punktów dostosowania (łącznych). W opisany sposób, w oparciu o zbiory współrzędnych punktów łącznych i przy założeniu transformacji konforemnych, wyznaczono parametry formuł transformacyjnych dla kilku układów lokalnych, m.in. miasta Krakowa i miasta Łodzi (**ŁAM**). W obu podanych przypadkach wykorzystano po ok. 600 punktów łącznych przyjmując wielomiany konforemne odpowiednio stopnia 4 i 3. Dla obu wymienionych obiektów uzyskano błąd standardowy dopasowania wynoszący 0.03 m. Podwyższanie stopnia wielomianu nie poprawia tego wyniku, więc nie jest uzasadnione (odchyłki na punktach łącznych mają charakter losowy). Przykład pliku parametrowego dla układu lokalnego Krakowa przedstawiono w rozdziale 16.

W zbiorze układów pakietu **GEONET_unitrans** występuje dodatkowo układ nazwany symbolicznie **xy42_83**. Jest to zmodyfikowany w latach późniejszych układ odniesienia **1942**, będący wynikiem powtórzonego wyrównania osnów podstawowych państw b. bloku wschodniego. Układ ten nie został wprawdzie wprowadzony do szerszych zastosowań w obszarze Polski ale z uwagi na jego przyjęcie w krajach sąsiednich, był podstawą opracowań numerycznych i kartograficznych niektórych odcinków granicy państwowej (z Czechami, Słowacją i Ukrainą).



Rys. 28. **GEONET@_unitrans** – wersja 7.1. Specjalne funkcje numeryczne: opcje korekt globalnych układu **1965**, układy lokalne, transformacje wielomianowe stopnia 1-9, obliczenia sieci wektorowych GPS.



Rys. 29. Graficzna prezentacja danych w programie **GEONET_unitrans** – wersja 7.1

■ Graficzna prezentacja zbiorów wejścia-wyjścia z użyciem dodatkowych narzędzi graficznych (łączenie punktów, określanie wzajemnych odległości, wyznaczanie powierzchni obszarów, zmiana skali, wprowadzanie opisów, wydruk szkicu). Moduł ten stanowi przede wszystkim narzędzie kontrolne, jakie wynika z wizualizacji danych i wykonania prostych operacji kartometrycznych.

■ Obliczenie sieci wektorowej GPS. Moduł ten wraz z procedurami transformacyjnymi współrzędnych umożliwia pełne opracowanie numeryczne sieci GPS na co składa się:

- wstępna kontrola układu wektorów (protokół oceny wyznaczalności, niezawodności sieci oraz odchyłek zamknięć figur),
- ściśle wyrównanie sieci w trójwymiarowym układzie kartezjańskim XYZ elipsoidy GRS-80 wraz z analizą dokładności,
- transformacja wyników do płaskiego układu odwzorowawczego i systemu wysokości normalnych

17.3. Uwagi końcowe

Algorytmy lub procedury transformacyjne, zawarte w programach **TRANPOL** i **GEONET@_unitrans** zostały zastosowane także w centralnej bazie danych GEOS w CODGiK, jak również w innych krajowych programach, m.in. w systemie GEO-INFO oraz ostatnio w pakiecie **SWDE konwertor 2000**.

Literatura

- [1] **Balcerzak J.:** *Odwzorowanie Gaussa–Krügera w szerokiej 12° strefie dla obszaru Polski.* IX Szkoła Kartograficzna. Komorowo, 10-14.10.1994.
- [2] **Gajderowicz I.:** *Kartografia matematyczna dla Geodetów.* Wyd. ART - Olsztyn, 1991, n.ed. 1999.
- [3] **Hausbrandt S.:** *Rachunek wyrównawczy i obliczenia geodezyjne.* T. II, PPWK Warszawa 1971.
- [4] **Kadaj R.:** *Formuły odwzorawcze i parametry układów współrzędnych.* Wytyczne Techniczne G-1.10. Wydawca: GUGiK, Warszawa, grudzień 1999.
- [5] **Kadaj R.:** *Procedury transformacji pomiędzy państwowymi układami współrzędnych.* Opis procedur bazy GEOS w CODGiK. GEOMAT sp. z o.o. w Poznaniu, wrzesień 1999.
- [6] **Kadaj R.:** *Układ Kartograficzny PUK2000 (projekt wdrożeniowy).* INFOPRO s.a. Przedsiębiorstwo Projektowo–Wdrożeniowe, Warszawa, sierpień 1999
- [7] **Krüger L.:** *Konforme Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene.* Pr. Geod. Institut. Neue Folge 51, Podstam, 1912.
- [8] **Panasiuk J., Balcerzak J., Gdowski B.:** *The Roussilhe projection of the entire ellipsoid.* 16th International Cartographic Conference, Cologne 1993, 1278–1286
- [9] **Plewako M.:** *Enlargement of efficient application of L. Krüger's algorithm for computation of rectangular coordinates in the Gauss- Krüger projection in a wide meridional zone.* Zesz. Nauk. AGH, s. Geodezja, z.112, Kraków 1991, 105-117
- [10] Wytyczne Techniczne G-1.10 (nowa edycja). Załącznik na CD-R: Program TRANSPOL, © Główny Geodeta Kraju, GUGiK - Warszawa 2000
- [11] Instrukcja Techniczna G-2 (nowe wydanie). GUGiK - Warszawa 2000
- [12] Rozporządzenie Rady Ministrów w sprawie państwowego systemu odniesień przestrzennych. Dz.U nr 70 z dn. 24.08.2000r., poz. 821.
- [13] Ekspertyza dotycząca odwzorowania kartograficznego dla wielkoskalowych opracowań geodezyjnych i kartograficznych w Polsce. Polska Akademia Nauk, Komitet Geodezji, Sekcja Sieci Geodezyjnych. Opracowanie wykonane zespół pod przewodnictwem **prof. dr hab. inż. Włodzimierza Barana**
- [14] PAŃSTWOWY UKŁAD WSPÓŁRZĘDNYCH 1992. Główny Geodeta Kraju (mat. do użytku służbowego). Warszawa 1995. Opracowanie wykonane przez **dr-a Henryka Balcerzaka.**
- [15] GEONET_unitrans: uniwersalny program transformacji współrzędnych pomiędzy różnymi układami w obszarze Polski oraz programy pomocnicze. Opis pakietu. I wyd. 1977, n. ed. 2000, ALGORES-SOFT s.c. Rzeszów.
- [16] SWDE-konwertor 2000, wersja 2a. © ALGORES-SOFT Rzeszów 2002. Program wykonany na zlecenie GUGiK.